8 Paskaita. Atsitiktinių dydžių vidurkis

8.1 Paprastojo atsitiktinio dydžio matematinė viltis

Tarsime, kad šio skyrelio atsitiktiniai dydžiai yra apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Apibrėžimas. *Paprastojo atsitiktinio dydžio X su reikšmių aibe $C = \{x_1, \dots, x_k\}$ matematine viltimi (vidurkiu) vadiname skaičių*

$$x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \ldots + x_k P(X = x_k).$$

Žymime atsitiktinio dydžio X vidurkį taip

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i,$$

čia $p_i = P(X = x_i), i = 1, 2, \dots, k$.

Pavyzdys. Bernulio atsitiktinį dydį $X(w) = \mathbb{I}_{\{w \in A\}}$ galime užrašyti taip $X(w) = 1 \cdot \mathbb{I}_{\{w \in A\}} + 0 \cdot \mathbb{I}_{\{w \notin A\}}$. Todėl jo vidurkis

$$\mathbf{E}X = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p,$$

kur $p = P(A), A \in \mathcal{A}$.

Pavyzdys. Panagrinėkime tokį lošimą. Sumokėjęs vieno euro mokestį, lošėjas traukia du rutulius iš urnos, kurioje yra du balti ir trys juodi rutuliai. Jam išmokama tiek eurų, kiek baltų rutulių jis ištraukė. Taigi jeigu jam pavyko ištraukti tik vieną baltą rutulį, jis atgauna įmokėtą eurą, jeigu du – gauna du eurus. Kam naudingas toks lošimas: lošėjams, ar lošimo organizatoriams? Įsivaizduokime, kad tokioje loterijoje dalyvauja didelis lošėjų skaičius n. Vadinasi, jie organizatoriams sumoka n eurų. Apskaičiuokime, kiek vidutinškai atgauna vienas lošėjas.

Tegu X yra baltų rutulių skaičius tarp ištrauktųjų, kartu ir lošėjo laimėjimas. Tada

$$P(X = 0) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = 0,3, \quad P(X = 1) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = 0,6, \quad P(X = 2) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = 0,1.$$

Vidutiniškai vieno lošėjo laimėjimo vidurkis yra

$$\mathbf{E}X = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,1 = 0,8.$$

Turint omenyje, kad jis įmokėjo vieną eurą, lošėjas vidutiniškai pralaimi 0,2 eurus. Toks yra lošimo organizatoriaus pelnas. Pavyzdžiui, jei pavyko pritraukti 100 lošėjų, lošimo organizatoriaus pelnas bus 20 eurų.

Apibrėžimas. *Tegu ξ yra diskretusis atsitiktinis dydis, be to eilutė*

$$\sum_x xP(\xi = x)$$

absoliučiai konverguoja. Tada šios eilutės sumą žymėsime $\mathbf{E}\xi$ ir vadinsime atsitiktinio dydžio ξ matematiniu vidurkiu.

Prisiminkime, kad eilutės absoliutus konvergavimas reiškia, kad eilutė $\sum_x |x|P(\xi = x)$ konverguoja (jos suma yra baigtinė). Jei atsitiktinio dydžio ξ matematinis vidurkis egzistuoja, tuo pačiu egzistuoja ir $|\xi|$ matematinis vidurkis.

8.2 Diskrečiųjų atsitiktinų dydžių vidurkių skaičiavimas

Pavyzdys. Binominis dydis

Jei $\xi \sim \mathcal{B}(n, p)$, tai ξ įgyja reikšmes $k = 0, 1, 2, \dots, n$ su tikimybėmis

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Apskaičiuosime vidurkį:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\xi &= \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} p^{k} (1-p)^{n-k-1} = np.\end{aligned}$$

Pavyzdys. Puasono dydis

Jei $\xi \sim \mathcal{P}(\lambda)$, tai ξ įgyja reikšmes $k = 0, 1, 2, \dots$ su tikimybėmis

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Apskaičiuosime vidurkį:

$$\mathbf{E}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda.$$

Panagrinėkime vidurkio savybes.

Teorema. *Tegu ξ, ξ_1, ξ_2 yra diskretieji atsitiktiniai dydžiai, turintys matematinius vidurkius. Teisingi tokie teiginiai:*

1. *su bet kokiomis konstantomis c_1 ir c_2 dydžio $c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ matematinis vidurkis taip pat egzistuoja ir*

$$\mathbf{E}[c_1\xi_1 + c_2\xi_2] = c_1\mathbf{E}\xi_1 + c_2\mathbf{E}\xi_2;$$

2. *jei $\xi_1 \le \xi_2$, tai $\mathbf{E}\xi_1 \le \mathbf{E}\xi_2$;*
3. *$|\mathbf{E}\xi| \le \mathbf{E}|\xi|$;*

4. jei ξ_1, ξ_2 yra nepriklausomi, tai atsitiktinio dydžio $\xi_1 \cdot \xi_2$ vidurkis taip pat egzistuoja ir

$$\mathbf{E}[\xi_1 \cdot \xi_2] = \mathbf{E}\xi_1 \cdot \mathbf{E}\xi_2.$$

Teorema. *Tegu ξ yra atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmes x_i , o $Y = f(X)$ – kitas atsitiktinis dydis, tai atsitiktinio dydžio Y vidurkis (jei tik jis egzistuoja) lygus*

$$\mathbf{E}Y = \sum_{i=1}^{k} f(x_i) P(X = x_i).$$

Pasinaudoję sudėtingo atsitiktinio dydžio reiškimo paprastesniais idėja apskaičiuosime hipergeometrinio dydžio vidurkį.

Pavyzdys. Hipergeometrinis dydis.

Tegu urnoje yra m baltų ir n juodų rutulių, atsitiktinai traukiame $u(u \leq m+n)$, rutulių. Atsitiktinio dydžio X reikšmė – baltų rutulių skaičius tarp ištrauktųjų. Surasime šio dydžio vidurkį. Dydžio reikšmių tikimybes apskaičiavome jau ankstesniame skyrelyje, taigi

$$\mathbf{E}X = \sum_{v} v \frac{C_m^v C_n^{u-v}}{C_{m+n}^u}$$

čia sumuojama pagal visas galimas dydžio reikšmes v. Užuot skaičiavę šią sumą tiesiogiai, bandykime išsisukti. Galime įsivaizduoti, kad rutuliai traukiami ne visi iš karto, bet vienas po kito. Pasinaudosime dydžiais $X_1, X_2, \ldots, X_u$:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jei i-asis rutulys baltas,} \\ 0, & \text{jei i-asis rutulys juodas.} \end{cases}$$

Tada

$$X = X_1 + \ldots + X_u.$$

Pastebėkime, kad visų dydžių X_i tikimybės yra vienodos:

$$P(X_i = 1) = \frac{m}{m+n}, \quad P(X_i = 0) = \frac{n}{m+n},$$

$$\mathbf{E}X_i = 1 \cdot \frac{m}{m+n} + 0 \cdot \frac{n}{m+n} = \frac{m}{m+n}.$$

Taigi

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}X_1 + \ldots + \mathbf{E}X_u = u \cdot \frac{m}{m+n}.$$

Šis pavyzdys dar kartą rodo, kokia svarbi yra vidurkio adityvumo savybė. Ja pasinaudoję netiesiogiai suskaičiavome gana sudėtingą sumą.

Pavyzdys. Geometrinis dydis

Jeigu Bernulio schemos bandymus su sėkmės tikimybe p atliksime iki pirmos sėkmės, tai atliktų bandymų skaičius X bus geometrinis atsitiktinis dydis, t. y.

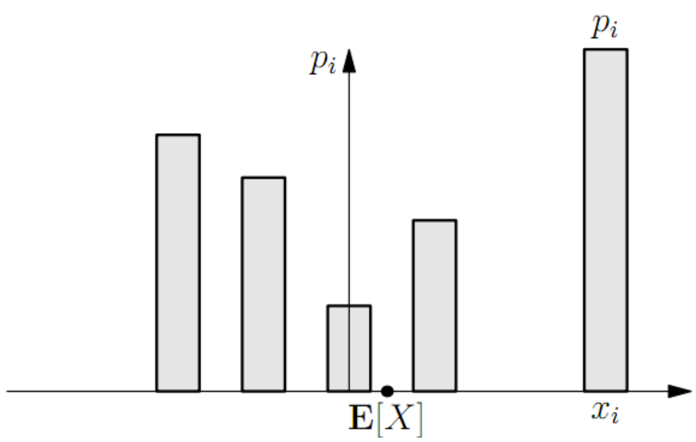
$$P(X = m) = q^{m-1} p, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Apskaičiuosime šio dydžio vidurkį. Kokia turėtų būti vidurkio reikšmė, galime spėti taip. Jeigu pirmasis bandymas baigėsi sėkme, tai $X = 1$, jeigu nesėkme – viskas tarsi prasideda nuo pradžių ir vidutiniškai iš viso teks atlikti (įskaitant pirmąjį) $1 + \mathbf{E}X$ bandymų. Taigi

$$\mathbf{E}X = 1 \cdot p + (1 + \mathbf{E}X)q, \quad (1-q)\mathbf{E}X = p + q = 1, \quad \mathbf{E}X = \frac{1}{p}.$$

8.3 Absoliučiai tolydžiųjų dydžių vidurkiai

Diskrečiojo atsitiktinio dydžio X vidurkį galime suvokti kaip svorio centro koordinatę: jeigu skaičių tiesės taškuose x_i "patalpinsime" $p_i = P(X = x_i)$ dydžio svorius (žr. brėžinį, jame svoriai vaizduojami vienodo pločio ir tikimybėms p_i proporcingo aukščio stulpeliais), tai $\mathbf{E}X$ bus šios figūros svorio centro koordinatė.



1 pav.: Vidurkis kaip svorio centras.

Jeigu X yra tolydusis atsitiktinis dydis, tai su visomis reikšmėmis x teisinga lygybė $P(X = x) = 0$. Tarkime, atsitiktinis dydis yra absoliučiai tolydusis, taigi turi tankį $p_X(x)$. Tada galime įsivaizduoti, kad ant skaičių tiesės yra patalpinti ne pavieniai svoriai, bet "uždėta" figūra, kurią iš viršaus riboja tankio grafikas. Kur dabar reiktį įrengti atramą, kad tiesė būtų pusiausvyroje, t.y. kaip nustatyti svorio centro koordinatę? Ši koordinatė būtų absoliučiai tolydžiojo atsitiktinio dydžio vidurkis.

Apibrėžimas. *Jeigu absoliučiai tolydžiojo atsitiktinio dydžio X tankis yra $p_X(x)$ ir integalo*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| p_X(x) dx$$

reikšmė yra baigtinė, tai atsitiktinio dydžio X vidurkiu vadinsime skaičių

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx.$$

Yra absoliučiai tolydžiųjų atsitiktinių dydžių, kurie vidurkių neturi.

Pavyzdys.

Tarkime, atsitiktinis dydis X turi tokį tankį:

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } |x| \leq 1, \\ \dfrac{1}{2x^2}, & \text{jei } |x| > 1. \end{cases}$$

Nusibraižę tankio grafiką, pamatytume, kad abscisių ašis ir tankio grafikas apriboja simetrišką ordinačių ašies atžvilgiu figūrą. Norėtųsi teigti, kad nulis yra šios figūros "svorio centro" abscisė, taigi ir atsitiktinio dydžio vidurkis. Tačiau nesunku įsitikinti, kad tankis netenkina sąlygos, suformuluotos vidurkio apibrėžime. Prasminga kalbėti tik apie tų figūrų, kurių "svoriai" baigtiniai, svorių centrus!

Pavyzdys. Sankt Peterburgo paradoksas

Bankas nutarė paskelbti tokią loteriją: dalyvis sumoka bankui dalyvio mokestį x ir mėto monetą tol, kol pasirodo pirmas herbas. Jeigu tai įvyksta r-me metime, dalyvis gauna iš banko sumą 2^r. Koks turi būti dalyvio įnašas x, kad bankui ši loterija nebūtų nuostolinga?

Aišku, kad $P(\xi = 2^r) = \frac{1}{2^r}$, todėl

$$\mathbf{E}\xi = \sum_{r=1}^{\infty} 2^r \cdot \frac{1}{2^r} = \infty$$

Taigi su bet kokiu pradiniu įnašu lošimas negali būti naudingas bankui. Paradoksalu šioje situacijoje ne tai, jog vidurkis neegzistuoja, bet tai, kad paskelbus šį lošimą, pavyzdžiui, su 100 eurų pradiniu įnašu ir išdėsčius matematinį įrodymą, kad lošimas visada nuostolingas bankui, tikriausiai pavyktų pritraukti nedaug žmonių sudalyvauti lošime, nes akivaizdu, kad dideli išlošimai yra labai mažai tikėtini.

Žinome, kaip skaičiuoti atsitiktinio dydžio $Y = f(X)$ vidurkį, kai X yra diskretusis atsitiktinis dydis. Panašus teiginys teisingas ir absoliučiai tolydiems dydžiams.

Teorema. *Tegu ξ yra atsitiktinis dydis, turintis tankį $p_\xi(x)$, o ϕ – Borelio funkcija, $\eta = \phi(\xi)$. Atsitiktinis dydis η turi vidurkį tada ir tik tada, kai integralas*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)| p_\xi(x) dx$$

yra baigtinis. Tada

$$\mathbf{E}\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) p_\xi(x) dx$$

Diskrečiųjų atsitiktinių dydžių vidurkių savybės (aditityvumo, nepriklausomų atsitiktini dydžių sandaugos vidurkio) yra teisingos ir absoliučiai tolydžiųjų atsitiktinių dydžių atveju. Atsitiktiniams absoliučiai tolydiems vektoriams teisinga ši teorema.

Teorema. *Tegu $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ yra absoliučiai tolydusis atsitiktinis vektorius, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – tokia Borelio funkcija, kad integralas*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, \dots, x_n)| p_\xi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

yra baigtinis. Tada atsitiktinis vektorius $\eta = f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ turi matematinį vidurkį ir

$$\mathbf{E}\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) p_\xi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

8.4 Absoliučiai tolydžiųjų atsitiktinų dydžių vidurkių skaičiavimas

Pavyzdys. Tolygusis atsitiktinis dydis

Tegu atsitiktinis dydis X yra tolygiai pasiskirstęs intervale $[a, b]$. Tada jo tankis

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x \notin [a, b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{jei } x \in [a, b]. \end{cases}$$

Akivaizdu, kur reikia įrengti atramą, kad "tankio stačiakampis" liktų pusiausvyroje:

$$\mathbf{E}X = \frac{b+a}{2}.$$

Tačiau apskaičiuokime ir naudodamiesi apibrėžimu:

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

Pavyzdys. Eksponentinis atsitiktinis dydis

Apskaičiuosime eksponentinio atsitiktinio dydžio $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ vidurkį. Šio dydžio tankis

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{jei } x \geq 0. \end{cases}$$

Skaičiuojant vidurkį pasinaudosime integravimo dalimis metodu:

$$\mathbf{E}X = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = -\int_0^{\infty} x d\left(e^{-\lambda x}\right) = -x e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Pavyzdys. Normalusis atsitiktinis dydis

Standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ tankis

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Akivaizdu, kad funkcija yra lyginė, jos grafikas simetriškas ordinačių ašies atžvilgiu, todėl $\mathbf{E}X = 0$.

Jeigu tiesiškai transformuosime šį dydį, t. y. apibrėšime $Y = \sigma X + \mu$, tai gausime vėl normalųjį dydį $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ Jo vidurkis

$$\mathbf{E}Y = \mathbf{E}[\sigma X + \mu] = \mathbf{E}[\sigma X] + \mathbf{E}[\mu] = \sigma \mathbf{E}X + \mu = \mu.$$