Paskaita 11

Pagrindinė algebros teorema

Suformuluosime (be įrodymo) tokį teiginį:

T Kiekvienam laukui K egzistuoja jo plėtinys K' (t.y. $K \subset K'$), kuriame į polinomas $f \in K[x]$, kuri n-tosios eilės, lygiai n šaknų $x_j \in K'$, $j = 1, 2, \ldots, n$

Pav 1. $f(x) = x^2 + 1$ turi dvi komplek-sines šaknis $x_{1,2} = \pm i$. Taigi realiųjų skaičių laukas $\mathbb{R}$ nėra algebriškai uždaras.

Pagrindinė algebros teorema

$\boxed{\text{T Kompleksinių skaičių laukas } \mathbb{C} \text{ yra algebriškai uždaras.}}$

ema 1: Kiekvienas nelyginio laipsnio polinomas su realiaisiais oeficientais ($f \in \mathbb{R}[x]$) turi realiąją šaknį $\bar{x} \in \mathbb{R}$.

Įrodyme naudosime paprastą matematinės analizės rezultatą (Bolcano teoremą). Ji tvirtina, kad tolydžioji funkcija $F(x)$, kuri uždaro intervalo $[a, b]$ galuose įgyja skirtingo ženklo reikšmes, t.y. $\boxed{F(a)F(b)<0}$, bent vieną to intervalo tašką $x_0 \in (a,b)$ atvaizduoja į nulį, t.y. $F(x_0)=0$.

Imkime nelyginį skaičių $n = 2m+1$ ir nagrinėkime polinomą

$$f(x) = x^{2m+1} + a_{2m}x^{2m} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$= x^{\overset{n}{2m+1}}\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}\right).$$

Pažymėkime: (čia a ir b ne tie patys, kaip Bolcano teoremoje)

$$a = \max_{0 \le j \le n-1} |a_j|, \quad b = \max(1, 2na)$$

$$(t.y. \quad b \ge 1).$$

Tada $\boxed{\frac{na}{b} \le \frac{1}{2}}$, $\frac{1}{b} \geq \frac{1}{b^2} \geq \dots \geq \frac{1}{b^n}$.

Nagrinėkime sumą $\le \frac{na}{b}$

$$1 + \frac{a_{n-1}}{b} + \dots + \frac{a_0}{b^n} \ge 1 - \frac{1}{b}(|a_{n-1}| + \dots + |a_0|)$$

$$\ge \frac{1}{2} > 0.$$

Todėl $f(b) = b^{2m+1}\left(1 + \frac{a_{n-1}}{b} + \dots + \frac{a_0}{b^n}\right) > 0$,

$$f(-b) = -b^{2m+1}\left(1 - \frac{a_{n-1}}{b} + \dots + \frac{a_0}{(-1)^n b}\right) < 0,$$

nes $(2m+1)$ yra nelyginis skaičius.

Tada iš Bolcano teoremos, gauname, kad

$\exists\, x_0 \in (-b, b)$: $f(x_0) = 0$ $\triangleright$

Pastaba Dalijimo pusiau metodas iš remiasi šia lema. - taip galime ieškoti $f(x) = 0$ lygties sprendinių ne tik polinomams, bet ir kitoms tolydžioms funkcijoms $f(x)$

Paskaita 11

Pagrindinė teorema. Įrodysime antrąjį pagalbinį teiginį.

Lema 2. Kiekvienas nenulinio laipsnio polinomas, kurio koeficientai yra realieji skaičiai, turi šaknį kompleksinių skaičių lauke $\mathbb{C}$ ($f \in \mathbb{R}[x]$).

Taigi $\mathbb{C}$ ir yra reikalingas plėtinys realiųjų skaičių laukui. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Įsitikinsime, kad tada $f(x)$ turi n šaknų $x_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots, n = \deg f$.

Tarkime $a \in \mathbb{C}$ ir yra šaknis $f(a) = 0$.

$$\Rightarrow f(a) = a_n \cdot a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_1 a + a_0 = 0$$

Skaičiuokime jungtinę reikšmę:

$$\overline{f(a)} = \overline{a_n a^n} + \overline{a_{n-1} a^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 a} + \overline{a_0}$$

Koeficientai $a_j \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{a_j} = a_j$, $j = 1, \dots, n$.

Taip pat žinome elementarią kompleksinių skaičių savybę

$$\overline{c_1 \cdot c_2} = \overline{c_1} \cdot \overline{c_2}$$

Todėl

$$0 = \overline{f(a)} = a_n (\bar{a})^n + a_{n-1} (\bar{a})^{n-1} + \dots + a_1 \bar{a} + a_0$$

Reiškia $\bar{a}$ irgi yra polinomo šaknis.

Pertvarkome polinomo išraišką

$$f(x) = (x-a)(x-\bar{a})\, g(x)$$

(Kol kas nežinome, ar polinomas $g \in \mathbb{R}[x]$, bet $g \in \mathbb{C}[x]$).

$$(x-a)(x-\bar{a}) = x^2 - (a+\bar{a})x + a \cdot \bar{a}$$

Kadangi $a + \bar{a} \in \mathbb{R}$, $a \cdot \bar{a} = |a|^2 \in \mathbb{R}$, tai $g \in \mathbb{R}[x]$, $\deg g = n-2$.

Taigi $f(x)$ turi n - kompleksinių šaknų, (aišku, reikia užbaigti Lemos 2 įrodymą).

Lemą įrodysime mat. indukcijos metodu

kai $n = 2m$, nes $n = 2m+1$ jau išnagrinėjome. Tada n galime užrašyti taip

$n = 2^k s$, kur s jau yra nelyginis skaičius.

Kai s – visi nelyginiai teigiami skaičiai, o k visi sveikieji ~~neneigiami~~ teigiami skaičiai, tai $2^k s$ reikšmių aibė yra visi sveikieji ~~neneigiami~~ lyginiai skaičiai (pastebime tokią specialią numeraciją).

Lemos tvirtinimas aiškiai teisingas, kai $k = 0$ (tada iš Lemos 1).

Tarkime, kad lemos tvirtinimas yra teisingas visiems polinomams, kurių laipsnis yra $2^r s$, s – bet koks $(k \le r)$ nelyginis skaičius.

Įrodysime, kad tada lemos teiginys yra teisingas ir visiems polinomams $f(x)$ kurių laipsnis $\deg f = 2^{r+1} s$

Fiksuokime $n = 2^{r+1} s$. Tada iš anksčiau suformuluotos teoremos žinome, kad $\exists$ toks $\mathbb{R}$ plėtinys $(\mathbb{R} \subset \mathbb{R}')$ $\mathbb{R}'$, kuriame $f(x)$ turi n šaknų $y_j \in \mathbb{R}'$ ir $f(y_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Parodysime, kad bent viena iš šių šaknų yra kompleksinis skaičius $\in \mathbb{C}$

Fiksuokime (laisvai pasirinkime) realųjį skaičių $c \in \mathbb{R}$ ir nagrinėkime elementus iš $\mathbb{R}'$:

$$h_{ij} = y_i y_j + c(y_i + y_j), \quad i < j$$

$$\begin{matrix} h_{12}, & h_{13}, & \dots, & h_{1n} \\ & h_{23}, & \dots & h_{2n} \\ & & & h_{n-1,n}. \end{matrix}$$

nes turime tokių elementų

$$(n-1)+(n-2)+\dots+1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2^{r+1}\cdot s\right)\left(2^{r+1}s-1\right) = 2^r \underbrace{s\left(2^{r+1}\cdot s-1\right)}_{t\text{ – nelyginis skaičius}}$$

$$= 2^r\cdot t := m$$

Sudarykime naują polinomą

$$g(x) = \prod_{1\le i<j\le n} (x - h_{ij}) = x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_1x+b_0.$$

Keičiant $y_1, \dots, y_n$ numeracijos tvarką, keičiasi tik h_{ij} tvarka, bet polinomo $g(x)$ koeficientai <u>nesikeičia</u>. Šie koeficientai yra $y_1, \dots, y_n$ <u>simetriniai</u> polinomai su realiaisiais koeficientais

$\Rightarrow$ $b_0, b_1, \dots, b_{m-1}$ yra realieji skaičiai.

Bet tada iš indukcinės prielaidos gauname, kad $g(x)$ (kaip $m = 2^r t$ eilės polinomas) turi šaknį kompleksinių skaičių lauke $\mathbb{C}$:

$$h_{ij} = y_i y_j + c\,(y_i + y_j) \in \mathbb{C}.$$

Kadangi skirtingų indeksų (i, j) yra baigtinis skaičius, o skaičių c pasirenkame laisvai (bet koks realusis skaičius), tai $\exists$ bent du skirtingi realieji skaičiai c_1 ir c_2, kuriems atitinka ta pati indeksų (i, j) pora. Aišku elementai

$$h_{ij}^{(1)} = y_i y_j + c_1 (y_i + y_j)$$

$$h_{ij}^{(2)} = y_i y_j + c_2 (y_i + y_j)$$

bus skirtingi kompleksiniai skaičiai

$$h^{(1)} = y_{i_0} y_{j_0} + c_1 (y_{i_0} + y_{j_0})$$

$$h^{(2)} = y_{i_0} y_{j_0} + c_2 (y_{i_0} + y_{j_0}).$$

(abi kompleksiniai skaičiai).

$$\frac{h^{(1)} - h^{(2)}}{c_1 - c_2} = y_{i_0} + y_{j_0} \in \mathbb{C}$$

$= -p$ (pažymėkim)

$$\frac{c_1 h^{(2)} - c_2 h^{(1)}}{c_1 - c_2} = y_{i_0} \cdot y_{j_0} \in \mathbb{C}$$

$= q$ (pažymėkim)

p ir q yra kompleksiniai skaičiai

Tada iš Vieto teoremos gauname, kad y_{i_0} ir y_{j_0} yra lygties

$x^2 + px + q = 0$ sprendiniai

p ir $q \in \mathbb{C}$.

Tokios lygties sprendiniai yra kompleksiniai skaičiai, todėl y_{i_0} ir $y_{j_0} \in \mathbb{C}$. ▷

Lema 3. $f(x) \in \mathbb{C}$ $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$,

Nubrėžkime polinomą $\tilde{f}(x) \in \mathbb{C}$:

$\tilde{f}(x) = \bar{a}_n x^n + \dots + \bar{a}_0$, tai

$$g(x) = f(x)\tilde{f}(x) \in \mathbb{R}[x].$$

$$g(x) = \tilde{b}_{2n} x^{2n} + \dots + b_0,$$

$$b_j = \sum_{l+k=j}{}' a_l \bar{a}_k$$

Skaičiuojame $\bar{b}_j$

$$\bar{b}_j = \overline{\sum_{l+k=j}{}' a_l \bar{a}_k} = \sum_{l+k=j}{}' \bar{a}_l a_k = b_j$$

Tada $b_j \in \mathbb{R}$.

T. (pagrindinė) Kiekvienas n-ojo laipsnio polinomas $f \in \mathbb{C}[x]$ (su komplek. koeficientais) turi n kompleksinių šaknų.

$$f(x) = a_n (x - y_1)^{m_1} \dots (x - y_k)^{m_k}$$

m_j - šaknies y_j kartotinumas

Teorema. Visos polinomo

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[x]$$

šaknys yra kompleksinės.

△ $g(x) = f(x)\tilde{f}(x) \in \mathbb{R}[x]$. Tada

šis polinomas turi šaknį $\alpha \in \mathbb{C}$.

$g(\alpha) = 0$. (pagal lemą 2).

Taigi

$$f(\alpha)\tilde{f}(\alpha) = 0.$$

Čia $\tilde{f}(\alpha) = \bar{a}_n \alpha^n + \bar{a}_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + \bar{a}_0$.

Kompleksinių skaičių $\mathbb{C}$ lauke nėra nulio daliklių, tai vienas iš dauginamųjų

$f(\alpha) = 0$ arba $\tilde{f}(\alpha) = 0$.

$\Downarrow$

1) Tada $\alpha \in \mathbb{C}$ yra $f(x)$ šaknis.

2) $\tilde{f}(\alpha) = 0 \Rightarrow 0 = \bar{0} = \overline{\tilde{f}(\alpha)}$

$$= \overline{\bar{a}_n \alpha^n + \bar{a}_0} = a_n(\bar{\alpha})^n + a_{n-1}(\bar{\alpha})^{n-1} + \dots + a_0$$

$$= f(\bar{\alpha})$$

Taigi tada $\bar{\alpha}$ yra polinomo $f(x)$ šaknis ▷