# Paskaita 2

## Vienos paprastųjų diferencialinių lygčių aprašomi reiškiniai

Šioje paskaitoje nagrinėsime labai skirtingus reiškinius, bet parodysime, kad juos aprašantys matematiniai modeliai patenka į vieną bendrą uždavinių aibę.

~~Moo~~ 1. Populiacijos ~~aug~~ dinamikos modeliai

Čia populiacija gali būti labai įvairių objektų aibė – a) gyventojų populiacija

b) sergančių žmonių populiacija

c) ~~augalo~~ naviko augimo modeliai

Nagrinėsime situacijas, kai galime nenagrinėti aplinkos (kitų faktorių) dinamikos, kurios poveikį laikome pastoviu (bendresni atvejai yra žinoma jos dinamika)

2012

-2-

Tarkime, kad populiacijos augimo/didėjimo greitis proporcingas populiacijos dydžiui, daugiklis yra g, o mažėjimo greitis daugiklis yra m. (pvz. Vilniaus gyventojai gimsta, miršta, atvažiuoja mokytis, dirbti, išvažiuoja į kitus regionus, emigruoja į užsienį, atvyksta iš užsienio (migrantai)!

~~Tada k~~ Iš čia greitis yra lygus $(g-m)N(t)$, kur $N(t)$ yra populiacijos dydis laiko momentu $t$.

Gauname labai nesudėtingą, tačiau kokybiškai svarbų modelį

$$\frac{dN}{dt} = rN \qquad (1)$$

Suformuluojame pradinę sąlygą

$$N(0) = N_0 \qquad (2)$$

Kaip keičiasi populiacija?

Tokį uždavinį galime užrašyti tokiu

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{rt}}$$

Panagrinėkime atskirus atvejus:

1) $r=0$, $N(t)=N_0$ populiacijos dydis yra pastovus (stacionarus) ir lygus pradinei sąlygai

2) $r>0$ $N(t) \to \infty$ kai $t \to \infty$

Maltuso dėsnis – žmonijos laukia katastrofa dėl per didelio gyventojų skaičiaus.

Uždav. 1 Surinkite statistinę informaciją, kaip kito Žemės gyventojų skaičius 1700–2020 metais. Ar šie duomenys atitinka modelį (1).

-3A-

# Koronavirusa statistika

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1.29 | 30 | 31 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 38 | 43 | 46 | 45 | 58 | 64 | 66 | 73 | 73 | 86 | 89 |
| | | | | | + | | + | 80 | 86 | |
| | | | | | | | | 9 97 | | |

$$\boxed{e^{\lambda \cdot 1} = 1.07}$$

~~Prognoze~~

~~8 9~~

~~95 105~~

N - [illegible] $\frac{dN}{dt} = \lambda N$

[illegible] $M = \mu N$

$$\boxed{\frac{dM}{dt} = \lambda M.}$$

$$\boxed{1 \leq e^{\lambda} \leq 1.2}$$

Novel-Coronavirus (2019-nCoV).

3) $r < 0$ $\quad N(t) \to 0$, kai $t \to \infty$.

Populiacija išnyksta. (tai gali būti ir labai trokštama tendencija, jei pvz. $N(t)$ yra ligos virusų koncentracija arba taršos koncentracija)

Resursų ribojimo modeliai

---

Populiacijai augant, stebime jos augimo greičio mažėjimą. Pakankamai geras daugelio rezultatų modelis, kai šis greitis mažėja tiesiškai. (proporcingumo koeficientas mažėja)

$$\frac{dN/dt}{N} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

ir tampa lygus 0, kai $\boxed{N = K}$

Resursai visi panaudoti. Jei $N > K$, tai populiacijos dydis pradeda mažėti.

Gauname, taip vadinamą, logistinį modelį:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = r N \left(1 - \dfrac{N}{K}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Iš šių lygčių galime išspręsti ~~analitiš~~ ir gauti analitinę sprendinio išraišką. (Pratybos ir laboratoriniai darbai)

$$\boxed{\frac{dN}{N\left(1 - \frac{N}{K}\right)} = r\, dt.}$$

Bet atliksime grafinę (kokybinę) analizę.

Kol kas nagrinėkime bendrą

uždavinį:

Vardas, pavardė, parašas, data

(šaltinis nepriklauso nuo $t$)

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad x = x(t).$$

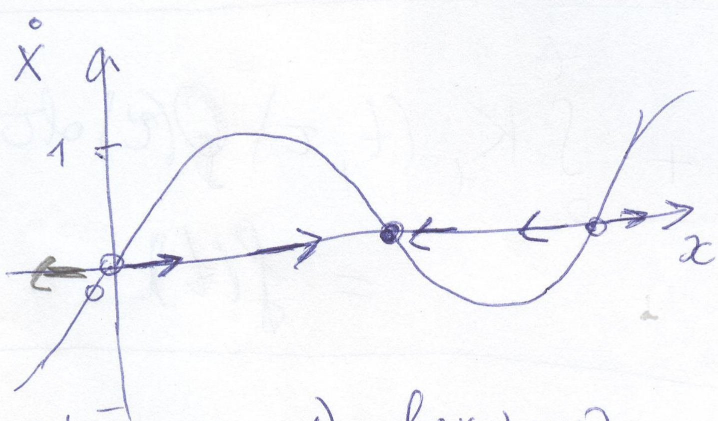
Tada diferencialinė lygtis apibrėžia

vektorinį lauką $\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ $\left(=(x, \dot{x})\right)$.

Ašyje $x$, galime brėžti vektorių kryptį

($\dot{x} > 0$ – į dešinę, $\dot{x} < 0$, į kairę.)

$f(x) = \sin x$



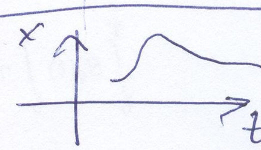

1) $f(x_0) = 0$, $x_0$ – stacionarus taškas (fixed point)

2

● – stacionarus taškas yra stabilus (f-ja mažėjanti)

○ – –||– yra nestabilus (f-ja didėjanti)

Pasirinkę pradinę taško padėtį $x_0$, stebime fazinį tašką $\left(x(t), \frac{dx}{dt}\right)$ kaip jis juda x-ašimi. $T_{x_0}$ $x = x(t)$ vadiname fazinio lauko trajektorija, prasidėjusia taške $x_0$.



Visos skirtingos trajektorijos sudaro

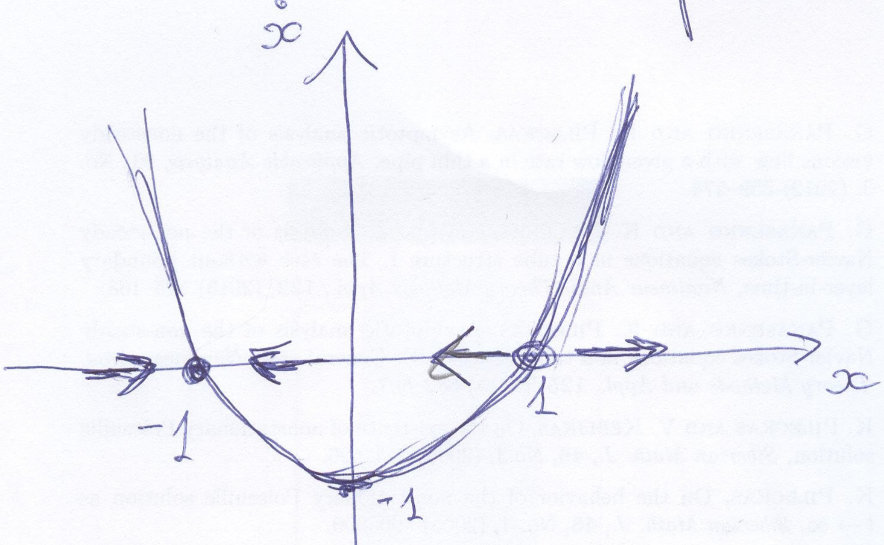
fazinį portretą

Stacionarūs taškai ( $f(x^*) = 0$ ) apibrėžia diferencialinio uždavinio stacionarius sprendinius

Pav. $\frac{dx}{dt} = x^2 - 1.$

Raskite stacionarius taškus ir atlikite jų klasifikaciją.

parabolė!




Stacionarūs taškai $\overset{*}{x} = -1$ ir $\overset{*}{x} = 1$.

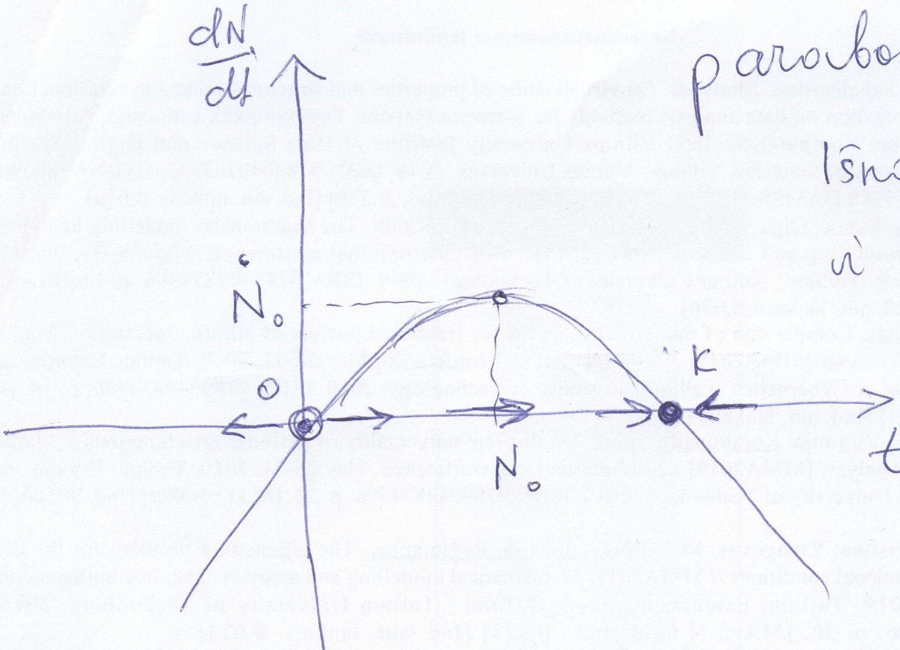
$x = 1$ yra nestabilus taškas

$x = -1$ yra stabilus stacionarusis taškas

Pav. 2 Logistinis modelis

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

$N^* = 0$ ir $N^* = K$ yra stacionarūs taškai




parabolė

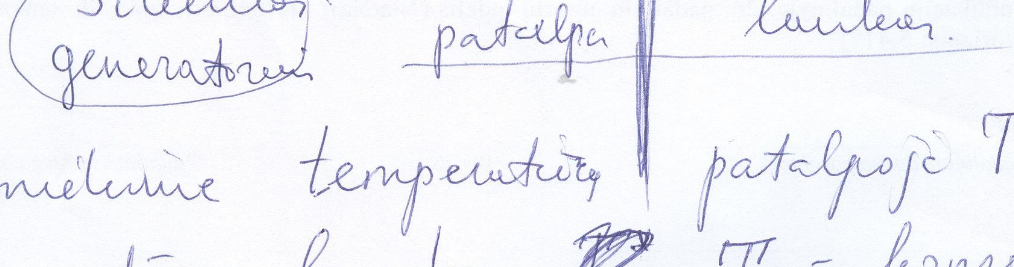
Išnagrinėti ir šiuolaikų sprend.

$N^* = K$ yra stabilus stacionarus taškas

$N^* = 0$ yra nestabilus stacionarus taškas.

Pirmos eilės dif. lygtimi aprašome daug įvairių procesų

Pav. 2 Šilumos mainai




Pažymėkime temperatūrą patalpoje $T(t)$.

Temperatūra lauke $T_L$ - konstanta

Patalpoje įjungiame šildytuvą, kuris generuoja šilumos kiekį $f(t)$

a) pro sienas (langą) išeinantis šilumos kiekis yra proporcingas temperatūrų skirtumui $\alpha\,(T(t) - T_L)$

Niutono dėsnis ↑

b) bendras šilumos kiekis ~~nekinta~~ keičiasi dėl gaunamo šilumos kiekio iš šildytuvo ir dėl prarandamo šilumos kiekio pro sienas.

c) tariame, kad šiluma tolygiai pasiskirsto visame kambaryje (maišymo procesas - jo mechanizmas aptariamas kitose paskaitose)

d) pradiniu laiko momentu kambario temperatūra $T_0$.

---

Matematinis modelis.

$$\rho\, c_v \frac{dT}{dt} = q - \alpha\,(T - T_L).$$

$\rho$ - yra medžiagos tankis $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$,

$c_v$ – medžiagos šiluminė talpa $[J/(kg \cdot K)]$

$q$ – šilumos generavimo greitis (tankis) $[W/m^3]$

$\alpha$ – šilumos konvekcijos per sieną koeficientas

! Visų modelio narių dimensijos turi būti vienodos

$$[q] = \frac{W}{m^3} = \cancel{[W] = [\frac{J}{s}]}$$

$$\boxed{W = \frac{J}{s} = \frac{kg\, m^2}{s^3}}$$

$$[\rho] = \frac{kg}{m^3} \qquad \left[\rho c_v \frac{dT}{dt}\right] = \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{J\, K}{s \cdot kg\, K}$$

$$[c_v] = \frac{J}{kg \cdot K} \qquad = \frac{J}{s m^3}$$

$$[\alpha T] = [\alpha]\cdot K = \frac{J}{s\,m^3} = \frac{W}{m^3}$$

$$\Rightarrow [\alpha] = \frac{W}{m^3 K}$$

## Radioaktyvumas (DL paskaitose)

Fizik. aprašas. Spontaniškas nestabilių kurio nors cheminio elemento izotopų virsmas kito elemento izotopais, išspinduliuojant elementarias daleles arba branduolius.

Egzistuoja tam tikra tikimybė kiekvieno branduolio skilimui per tam tikrą laiką (pasakyti, kuris konkrečiai ~~tk~~ branduolys skils negalime)

Ap. Laikas, per kurį suskyla pusė radioaktyvaus izotopo branduolių, vadinamas radioaktyvaus skilimo pusperiodžiu

$u(t)$ - medžiagos kiekis laiko momentu $t$.

$\lambda$ - yra medžiagos kitimo greičio proporcingumo medžiagos kiekiui dydis (tikimybė, kas sekund)

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u,$$

$$u(0) = u_0.$$

Raskime $\lambda$ - dimensiją.

$$[u] = kg \qquad \left[\frac{du}{dt}\right] = \frac{kg}{s}.$$

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{s}$. Pvz. radioaktyvaus elemento radžio atv.

$$\lambda = -1.4 \cdot 10^{-11} \ \frac{1}{s}.$$

<u>Užduotis 1.</u> <u>Rasti pusperiodį</u>

$$\boxed{u(t) = e^{-\lambda t} u_0} \Rightarrow e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$$

$$-\lambda t = -\ln 2$$

$$t = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx 10^{11} \, s$$

# Amžiaus nustatymas naudojant radioaktyvaus matematinį modelį (radioaktyviosios anglies metodas)

Gamtoje ir gyvuosiuose organizmuose radioaktyviosios anglies izotopo $C^{14}$ ir įprastinės stabiliosios anglies $C^{12}$ koncentracijų santykis yra konstanta. Kai organizmas miršta, radioaktyviosios anglies absorbcija (pvz. kvėpuojant ar per maistą) – nebevyksta. Taigi galima nustatyti fosilijų amžių, palyginant tą santykį fosilijose ir atmosferoje.

$C^{14}$ skilimo pusperiodis yra 5730 m. Tarkime, kad fosilijoje yra 25% pradinio $C^{14}$ kiekio.

Galima rasti k iš duomenų

$\frac{dy}{dt} = -ky$. $y(0) = y_0$.

$k = 0{,}000121$.

$25\% = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ , taigi fosilijos amžius

$$T = 5730 + 5730 = 11\,460 \text{ m.}$$

Paklaidos

1) Eksperimentiškai $C^{14}$ skilimo pusperiodis nustatomas su paklaida (≈ 40 metų).

2) Ilgame laiko intervale $C^{14}$ ir $C^{12}$ izotopų santykis iš lėto svyruoja

# Šuolis su parašiutu

a) sunkio jėga

b) oro pasipriešinimas

$$m\frac{dv}{dt} = \underbrace{mg}_{} - \beta \underbrace{v^2}_{}$$

$$v(0) = v_0$$

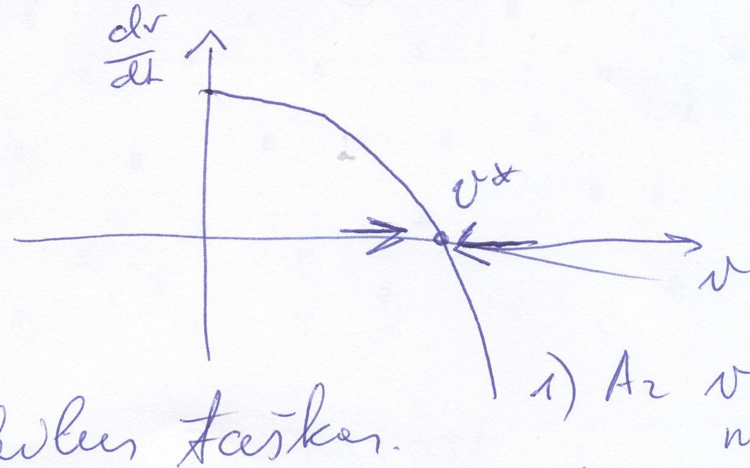
Nagrinėsime vektorinį lauką.

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\beta}{m}v^2$$

$$f(v) = g - \frac{\beta}{m}v^2$$

$$\boxed{v^* = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}}$$

stacionarus taškas (fixed point)




$v^*$ – stabilus taškas.

1) Ar $v^*$ – pasiekiamas

2) Kokiu greičiu nusileis parašiutininkas

$$\frac{dh}{dt} = -v, \quad h(0) = H.$$

1) Kiek laiko užtruks šuolis

2) Kokiu greičiu nusileis parašiutininkas

3)