Paskaita 12

Populiacijų dinamikos modeliai

Šioje paskaitoje apibendrinsime matematinių modelių sudarymo ir modeliavimo eksperimentų analizės, prognozės, bei optimizavimo žinias.

Nagrinėsime populiacijų dinamikos modelius, bet tokio tipo modeliai tinka ir kitose srityse, pvz. modeliuojant cheminių reakcijų dinamiką

<u>Fiziniai modeliai</u> Tarkime dvi populiacijas, kurias pavadinsime aukomis (grobiu) – (angl. prey). Pvz. zuikiai, mažos žuvytės ir t.t.

Plėšrūnai (angl. predator) - vilkai, lapės, plėšrios žuvys.

Pažymėkime x – aukų populiacijos skaičius

y – plėšrūnų skaičius.

Populiacijos dydis keičiasi, nes populiacijos dauginasi, miršta, ir vyksta ~~mes~~ maitinimasis (plėšrūnai gaudo aukas).

- kiškiai (aukos) randa maisto visą laiką jo užtenka, leisti populiacija augtų ~~gre~~ dydžiu (greičiu) $\alpha x(t)$ (proporcingai esamai populiacijai)
- plėšrūnai gali išsimaitinti (ir daugintis) tik tada, jei yra pakankamai kiškių (maisto). Jų apetitas beribis, todėl sumedžiojamų kiškių skaičius yra $\beta x(t) y(t)$.
- plėšrūnų populiacija didėja $\delta x(t) y(t)$
- didžioji dauguma kiškių yra sumedžiojami o plėšrūnų populiacija mažėja proporcingai populiacijos dydžiui $\gamma y(t)$ dydžiu $([\gamma] \frac{1}{s})$

Aptarsime modelio narį

$$\beta\, x(t)\, y(t)$$

Jis grindžiamas prielaida, kad sumedžiojamų aukų (kiškių) skaičius yra proporcingas tikimybei, kad susitiks plėšrūnas ir auka (jeigu $x(t)=0$ arba $y(t)=0$, tai ~~ne~~sumedžiojamų kiškių skaičius lygus 0).

Matematinis modelis

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x y, \quad x(0) = x_0$$

$$\frac{dy}{dt} = \delta x y - \gamma y, \quad y(0) = y_0$$

✓ jeigu $y(0) = 0$, tai $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$

✓ jeigu $x(0) = 0$, tai $y(t) = y_0 e^{-\gamma t}$.

Imkime pavyzdį (pateiktą literatūroje)

$\alpha = 1.2$, $\beta = 0.4$ $\quad x_0 = 10$

$\delta = 0.1$, $\gamma = 0.3$. $\quad y_0 = 5$.

Kitas atvejis (pradėkime nuo šio pr.).

$\alpha = 2/3$, $\beta = 4/3$ $\quad x_0 = y_0 = 1$.

$\delta = \gamma = 1$,

Kokias išvadas galime padaryti iš šių pirmųjų pavyzdžių.

1) Sprendiniai periodiškai atsikartoja – stebime populiacijų dinamikos ciklus

2) Abi populiacijos ~~antrajame~~ pirmajame pr. tam tikru momentu artimos 0 (beveik nėra), o paskui atsistato.

! Jeigu atsiranda papildomi poveikiai, tada aukų populiacija (pvz kiškių) gali tapti lygi 0 $\Rightarrow$ išnyksta ir plėšrūnų populiacija)

Prisiminkime tiesinių diferencialinių lygčių sistemų dinamikos analizę (tiesiniai modeliai yra paprasti, tarkime, kad taip linearizuojame modelį)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \tilde{\beta} y, & x(0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = \tilde{\delta} y - \gamma x, & y(0) = y_0 \end{cases}$$

Tada sprendinius surandame, išsprendę tikrinių reikšmių uždavinį:

$$AY = \lambda Y, \qquad Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & -\tilde{\beta} \\ \tilde{\delta} & -\gamma - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Priklausomai nuo koeficientų reikšmių galime gauti įvairius sprendinio dinamikos režimus

1) Osciliuojantis sprendinys (periodinis)

$\alpha = \gamma = \beta = 1, \quad \delta = 2$

2) Gęstančios osciliacijos

$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \delta = 1, \quad \gamma = 1.1$

3) Didėjančios osciliacijos

$\alpha = 1.1, \quad \beta = 2, \quad \delta = 1, \quad \gamma = 1$

4) Gęstantis sprendinys

$\alpha = 1, \quad \beta = 2.1, \quad \delta = 1, \quad \gamma = 2.$

Taigi tiesinio modelio sprendinių aibė turtinga. Netiesinio uždavinio atveju kol kas radome tik vieną svarbų atvejį, kai plėšrūnų ir aukų populiacijos periodiškai osciliuoja

Linearizavimas yra svarbus, kai nagrinėjame stacionarių sprendinių (fixed point) stabilumą

$$\begin{aligned} \alpha x - \beta x y = 0 \\ \delta x y - \gamma y = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x(\alpha - \beta y) = 0 \\ y(\delta x - \gamma) = 0 \end{aligned}$$

<u>Du sprendiniai</u> 1) $\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 0$

2) $\bar{x} = \frac{\gamma}{\delta}, \quad \bar{y} = \frac{\alpha}{\beta}$

Pirmasis atvejis reiškia, kad abi populiacijos yra išnykusios.

Šių sprendinių stabilumas priklauso nuo Jokobiano tikrinių reikšmių.

<u>Atlikime stabilumo analizę</u>

$$x = \bar{x} + X(t), \qquad y(t) = \bar{y} + Y(t).$$

$$x y \approx \bar{x}\bar{y} + \bar{y} X(t) + \bar{x} Y(t).$$

1) $\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 0.$ $\quad \boxed{\frac{dX}{dt} = \alpha X, \quad \frac{dY}{dt} = -\gamma Y}$

$$\underline{X(t) = X_0 e^{\alpha t} \to \infty}$$

2) $\bar{x} = \frac{\gamma}{\delta}, \quad \bar{y} = \frac{\alpha}{\beta}$

$$\frac{dX}{dt} = \alpha X - \beta \bar{y} X - \beta \bar{x} Y, \quad X(0) = X_0$$

$$\frac{dY}{dt} = \delta \bar{y} X + \delta \bar{x} Y - \gamma Y, \quad Y(0) = Y_0.$$

$\Rightarrow$ linearizuota sistema

$$\boxed{\frac{dX}{dt} = -\frac{\beta\gamma}{\delta} Y, \quad \frac{dY}{dt} = \frac{\delta\alpha}{\beta} X}$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\gamma\alpha X \quad \text{(osciliatorius)}$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \gamma\alpha Y \quad \text{(osciliatorius)}.$$

Sprendinys (stacionarusis) yra stabilus, bet asimptotinį stabilumą nulemia kvadratiniai netiesiniai nariai.

Sprendinius galime vaizduoti ir fazinėje erdvėje (x, y), tada eliminuojame laiką, bet galime aiškiau matyti sąryšį tarp x ir y reikšmių (gauname uždaras kreives, kurios priklauso nuo pradinių sąlygų).

Šioms uždaroms kreivėms gauname (be laiko) paprastąją diferencialinę lygtį

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}\,\frac{\delta x - \gamma}{\beta y - \alpha}$$

Atskiriame kintamuosius

$$\frac{\beta y - \alpha}{y}\,dy = -\,\frac{\delta x - \alpha}{x}\,dx$$

Sprendinys (neišreikštine forma)

$$\left(\beta - \frac{\alpha}{y}\right) dy = -\left(\delta - \frac{\gamma}{x}\right) dx$$

$$\boxed{\beta y - \alpha \ln(y) + \delta x - \gamma \ln(x) = V}$$

Konstantos V reikšmę apskaičiuojame iš pradinių sąlygų

$$V = \beta y_0 - \alpha \ln y_0 + \delta x_0 - \gamma \ln x_0 .$$