4 Bifurkacijos pirmosios eilės dinaminėse sistemose

4.1 Apibrėžimas. Bifurkacijomis vadinami tokie kokybiniai dinaminės sistemos pokyčiai, kurių metu ramybės taškai gali atsirasti arba išnykti, gali pakisti ramybės taškų stabilumas.

4.2 Apibrėžimas. Dinaminės sistemos parametrų reikšmės, kurios lemia bifurkacijas, vadinamos bifurkacijos taškais. Patys parametrai vadinami dinaminės sistemos valdančiaisiais parametrais.

4.1 Balno – mazgo bifurkacija. Normalioji forma

Balno – mazgo bifurkacija yra pagrindinė bifurkacija, kuri gali sukurti arba panaikinti ramybės taškus. Šios bifurkacijos metu, varijuojant dinaminės sistemos parametrus, du ramybės taškai tiese artėja vienas prie kito, susiduria ir panaikina vienas kitą. Gali būti ir taip, kad varijuojant parametrus atsiranda vienas, o vėliau jau du ramybės taškai.

Tarkime, kad nagrinėjame dinaminę sistemą, priklausančią nuo vieno parametro, t. y.

$$x' = f(x, r),$$

čia r – dinaminės sistemos valdantysis parametras.

Nagrinėkime dinaminės sistemos elgseną arti bifurkacijos taško (x^*, r_{krit}), t. y. šio taško aplinkoje skleiskime funkciją $f(x, r)$ Teiloro eilute:

$$\begin{aligned} f(x,r) = \quad & f(x^*, r_{krit}) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x^*, r_{krit})}(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial r}\Big|_{(x^*, r_{krit})}(r - r_{krit}) \\ + \quad & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(x^*, r_{krit})}(x - x^*)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\Big|_{(x^*, r_{krit})}(r - r_{krit})^2 + ... \end{aligned}$$

Kadangi x^* – ramybės taškas, tai jame $f(x^*, r_{krit}) = 0$. Kadangi r_{krit} taške gauname funkcijos grafiko liestinę, tai jame $\frac{\partial f}{\partial x}|_(x^*, r_{krit}) = 0$. Tuomet nagrinėjama dinaminė sistema gali būti užrašyta normaliąja balno – mazgo bifurkacijos forma

$$x' = a(r - r_{krit}) + b(x - x^*)^2,$$

čia $a = \frac{\partial f}{\partial r}|_{(x^*, r_{krit})}$, $b = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(x^*, r_{krit})}$. Ši forma gaunama atmetus funkcijos $f(x, r)$ skleidinio Teiloro eilute antrosios eilės narius pagal r ir trečiosios eilės narius pagal x t. y. nagrinėjant

$$f(x, r) = \frac{\partial f}{\partial r}\Big|_{(x^*, r_{krit})}(r - r_{krit}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(x^*, r_{krit})}(x - x^*)^2.$$

4.2 Transkritinė bifurkacija

Nagrinėjant pirmosios eilės dinamines sistemas galima ir tokia situacija, kad ramybės taškas egzistuoja visą laiką, tačiau keičiant valdančiojo parametro reikšmes mes pastebime, kad pakinta to ramybės taško stabilumas. Toks pasikeitimas dinaminėje sistemoje yra vadinamas transkritine bifurkacija.

Normalioji dinaminės sistemos, patiriančios transkritinę bifurkaciją, forma yra

$$x' = rx - x^2.$$

Ši dinaminė sistema primena logistinę lygtį.