13 Bifurkacijos antrosios eilės dinaminėse sistemose

13.1 Balno-mazgo, transkritinė ir pitčforko bifurkacijos

Kaip žinome, pirmosios eilės dinaminėse sistemose priklausomai nuo valdančiųjų parametrų ramybės taškai gali atsirasti arba išnykti arba gali pakisti ramybės taškų stabilumas. Dvimačiu atveju visa tai gali nutikti ir su orbitomis. Dabar nagrinėsime, kada osciliacijos atsiranda arba išnyksta. Bifurkaciją suprasime plačiąja prasme, t. y. kaip fazinio portreto topologinį pokytį kintant dinaminės sistemos parametrams.

Kalbėdami apie balno-mazgo, transkritinę ar pitčforko bifurkacijas dvimačiu atveju turime pastebėti, kad tai ką jau taikėme vienmačiu atveju tiesiog perkeliame į vienmatį poerdvį, kuriame tas bifurkacijas ir stebime, o kitos dimensijos atlieka tik pritraukimo prie to poerdvio, kuriame vyksta bifurkacijos, vaidmenį.

Lygiai taip pat kaip ir vienmačiu atveju antrosios eilės dinaminėse sistemose balno – mazgo bifurkacija yra viena pagrindinių bifurkacijų, kurių metu ramybės taškai sukuriami arba išnyksta jau esami.

Nagrinėkime dinaminę sistemą:

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases}$$

Tarkime, kad ši sistema dar priklauso ir nuo parametro μ. Jei esant tam tikrai parametro μ reikšmei nulinės izoklinės susikerta dviejuose taškuose, mes galime stebėti, kaip juda ramybės taškai: kintant μ reikšmei ramybės taškai artėja vienas prie kito ir susilieja, kai $\mu = \mu_{krit}$. Šiame taške viena nulinė izoklinė tampa kitos izoklinės liestine, o vėliau izoklinės išsiskiria ir ramybės taškai išnyksta. Taip elgiasi visos balno – mazgo bifurkacijos.

Tipinis balno – mazgo bifurkacijos pavyzdys būtų dinaminė sistema:

$$\begin{cases} x' = \mu - x^2, \\ y' = -y. \end{cases}$$

Šiuo atveju bifurkacija stebima tik viena kryptimi, t. y. turime vienmatį poerdvį. Kita kryptimi bėgant laikui sprendinys eksponentiškai mažėja.

Analogiška situacija yra su transkritine ir pitčforko bifurkacijomis, t. y. tiek transkritinę, tiek superkritinę ar subkritinę pitčforko bifurkacijas mes stebime tik vienmačiame poerdvyje.

Toliau pateiksime tipinės dinamines sistemas iliustruojančias šias bifurkacijas.

- Transkritinę bifurkaciją stebime tirdami sistemą

$$\begin{cases} x' = \mu x - x^2, \\ y' = -y. \end{cases}$$

- Superkritinę pitčforko bifurkaciją iliustruoja tokia dinaminė sistema:

$$\begin{cases} x' = \mu x - x^3, \\ y' = -y. \end{cases}$$

- Subkritinę pitčforko bifurkaciją stebėsime dinaminėje sistemoje

$$\begin{cases} x' = \mu x + x^3, \\ y' = -y. \end{cases}$$

13.2 Hopfo bifurkacijos

Hopfo bifurkacijos siejamos su ribiniais ciklais ir atsiranda tokiose dinaminėse sistemose, kuriose kintant dinaminės sistemos valdančiajam parametrui ramybės taškas praranda stabilumą.

Norėdami išsiaiškinti stabiliojo ramybės taško galimybes tapti nestabiliuoju turime prisiminti, kad ramybės taškų stabilumas yra siejamas su dinaminės sistemos charakteringosios lygties šaknimis arba Žordano matricos tikrinėmis reikšmėmis. Kaip žinome, ramybės taškai yra stabilieji, jei šiuose taškuose apskaičiuotos Žordano matricos abiejų tikrinių reikšmių realiosios dalys yra neigiamos, t. y. jei $\mathrm{Re}\lambda < 0$. Tokiu būdu kintant valdančiajam dinaminės sistemos parametrui turime nagrinėti tikrinių reikšmių realiąsias dalis ir žiūrėti jų ženklus. Iki šiol aptartos balno – mazgo, transkritinė ir abidvi pitčforko bifurkacijos buvo tos situacijos, kai turėjome realiąsias tikrines reikšmes ir stabilumo pokyčiai buvo susiję su tikrinių reikšmių ženklo pasikeitimu. Dabar nagrinėsime bendresnį atvejį, kai kompleksinės jungtinės tikrinės reikšmės iš kairiosios pusplokštumės pereina į dešiniąją, t. y. mus domina $\mathrm{Re}\lambda < 0$ pasikeitimas į $\mathrm{Re}\lambda > 0$.

Bendrai Hopfo bifurkacijas galima stebėti tik antrosios ir aukštesniųjų eilių dinaminėse sistemose. Apsiribosime tik antrosios eilės dinaminių sistemų analize. Išskiriamos dvi Hopfo bifurkacijos rūšys: superkritinė ir subkritinė. Superkritinės bifurkacijos atveju stabilusis židinys praranda stabilumą ir tampa nestabiliuoju židiniu, o kartu sistema suformuoja mažos amplitudės ribinį ciklą. Subkritinės bifurkacijos atveju trajektorijos gali peršokti į kitą ribinį ciklą (histerezė), dažniausiai atsiranda didelės amplitudės ribinis ciklas. Dažnai šias dvi Hopfo bifurkacijas yra sunku atskirti ir tai įmanoma tik atliekant skaitinį modeliavimą kompiuteriu. Taip pat norime paminėti, kad yra dar ir išsigimusi Hopfo bifurkacija, kurios metu mes stebime ne spirales (stabilias arba nestabilias), o yra suformuojamas centras. Tokiu būdu kintant valdančiojo parametro reikšmei bifurkacijos taške nekonservatyvi dinaminė sistema virsta konservatyvia.