8 Aštuntoji paskaita. TIESINĖS AUKŠTESNIŲJŲ EILIŲ DIFERENCIALINĖS LYGTYS

Šioje paskaitoje nagrinėjami klausimai:

1. Pagrindinės sąvokos. Sprendiniai ir jų savybės.
2. Tiesinės homogeninės DL su pastoviais koeficientais.
3. Charakteringoji lygtis ir jos šaknys.
4. Tiesinės homogeninės DL su pastoviais koeficientais bendrojo sprendinio išraiška.

8.1 Tiesinės aukštesniųjų eilių diferencialinės lygtys

Šiame skyrelyje supažindinsime su pagrindinėmis sąvokomis ir bendrąja tiesinių diferencialinių lygčių teorija. Kituose skyreliuose bus nagrinėjami atskiri tokių lygčių atvejai.

8.1 Apibrėžimas. n-tosios eilės diferencialinė lygtis vadinama tiesine, jei ji yra tiesinė funkcijos y ir visų jos išvestinių $y', y'', ..., y^{(n)}$ atžvilgiu. Bendrasis n-tosios eilės tiesinės diferencialinės lygties pavidalas yra

$$f_0 y^{(n)} + f_1 y^{(n-1)} + ... + f_{n-1} y' + f_n y = f_{n+1},$$

čia $f_i = f_i(x)$, $i = 0, 1, ..., n+1$ – tolydžiosios argumento x funkcijos.

Jei funkcija $f_0(x)$ argumento kitimo srityje nėra tapatingai lygi 0, tai iš jos padaliję lygtį, gausime n-tosios eilės tiesinę diferencialinę lygtį, kurios koeficientas prie aukščiausios išvestinės lygus 1:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = f(x), \tag{8.1}$$

čia $p_i = p_i(x)$, $i = 1, 2, ..., n$ ir $f(x)$ – žinomos tolydžiosios x funkcijos.

8.2 Apibrėžimas. (8.1) diferencialinė lygtis vadinama n-tosios eilės tiesine nehomogenine diferencialine lygtimi.

8.3 Apibrėžimas. (8.1) diferencialinė lygtis, kurios dešinės pusės funkcija tapačiai lygi 0 ($f(x) \equiv 0$), t. y.

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \tag{8.2}$$

vadinama n-tosios eilės tiesine homogenine diferencialine lygtimi.

8.4 Apibrėžimas. Jeigu (8.2) lygtis turi tuos pačius koeficientus kaip ir (8.1) lygtis, tai ji vadinama homogenine lygtimi, atitinkančia (8.1) nehomogeninę lygtį.

Lygtyje (8.1) keisdami laisvąjį kintamąjį x bet kuria tolydžiąja kintamojo t funkcija $x = \phi(t)$, gausime vėl tiesinę lygtį.

Lygtyje (8.1) keisdami funkciją y tiesine išraiška $y = \alpha(x)z + \beta(x)$, kurioje z – nauja funkcija, o $\alpha(x)(\alpha(x) \neq 0)$ ir $\beta(x)$ turi tolydžiąsias išvestines iki n-tosios eilės imtinai, gausime vėl tiesinę lygtį.

Dabar plačiau aptarsime (8.2) diferencialines lygtis ir jų sprendinius.

8.1 Teorema. *Jei funkcijos y_1 ir y_2 yra* (8.2) *diferencialinės lygties sprendiniai, tai ir jų suma $y_1 + y_2$ yra tos lygties sprendinys.*

Įrodymas. Dviejų sprendinių sumą $y_1 + y_2$ įrašome į (8.2) diferencialinės lygties kairiąją pusę:

$$(y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(y_1 + y_2)^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(y_1 + y_2)' + p_n(y_1 + y_2) =$$

$$(y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + ... + p_{n-1}y_1' + p_n y_1) + (y_2^{(n)} + p_1 y_2^{(n-1)} + ... + p_{n-1}y_2' + p_n y_2) = 0,$$

nes y_1 ir y_2 yra (8.2) diferencialinės lygties sprendiniai

$$\left(y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + ... + p_{n-1}y_1' + p_n y_1 \equiv 0 \quad \text{ir} \quad y_2^{(n)} + p_1 y_2^{(n-1)} + ... + p_{n-1}y_2' + p_n y_2 \equiv 0\right).$$

Taigi gavome, kad ir suma $y_1 + y_2$ yra (8.2) diferencialinės lygties sprendinys. □

8.2 Teorema. *Jei funkcija y_1 yra* (8.2) *diferencialinės lygties sprendinys, tai ir funkcija Cy_1, čia C – bet kuri konstanta, yra* (8.2) *sprendinys.*

Įrodymas. Į (8.2) diferencialinės lygties kairiąją pusę įrašę funkciją Cy_1, turime

$$(Cy_1)^{(n)} + p_1(Cy_1)^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(Cy_1)' + p_n(Cy_1).$$

Kadangi C – bet kuri konstanta, o funkcija y_1 – (8.2) diferencialinės lygties sprendinys, tai

$$C\left(y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + ... + p_{n-1}y_1' + p_n y_1\right) = 0.$$

Vadinasi, funkcija Cy_1 yra (8.2) diferencialinės lygties sprendinys. □

Iš šių dviejų teoremų galime gauti tokią išvadą:

8.1 Išvada. *Jei turime k* (8.2) *diferencialinės lygties sprendinių, tai ir jų tiesinis darinys*

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_k y_k$$

yra (8.2) *diferencialinės lygties sprendinys. Čia k – bet kuris natūralusis skaičius.*

Dar lieka neaišku, kokie turi būti sprendiniai y_1, y_2, ..., y_n, kad tiesinis darinys

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n \tag{8.3}$$

būtų (8.2) diferencialinės lygties bendrasis sprendinys. Čia reikėtų prisiminti tiesiškai nepriklausomų funkcijų sąvoką.

8.5 Apibrėžimas. Funkcijos y_1, y_2, ..., y_n, apibrėžtos intervale $[a, b]$, vadinamos tiesiškai nepriklausomomis tame intervale, jei su visais x iš intervalo $[a, b]$ lygybė

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n = 0 \tag{8.4}$$

galima tik tuo atveju, kai visos konstantos $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, ..., n$.

Kai su visais x iš intervalo $[a, b]$ tarp konstantų α_i yra bent viena nelygi 0, tai funkcijos y_1, y_2, ..., y_n vadinamos tiesiškai priklausomomis intervale $[a, b]$.

Pavyzdžiui, funkcijų sistema 1, x, x^2, ..., x^n yra tiesiškai nepriklausoma bet kuriame intervale.

Tarkime, kad turime n funkcijų y_1, y_2, ..., y_n, kurios intervale $[a, b]$ yra diferencijuojamos $(n-1)$ kartą. Tada galime sudaryti šių funkcijų Vronskio determinantą:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{8.5}$$

8.3 Teorema. *Jei* (8.2) *diferencialinės lygties sprendiniai* y_1, y_2, ..., y_n, *sudaro tiesiškai nepriklausomų intervale* $[a, b]$ *funkcijų sistemą, tai jų Vronskio determinantas yra nelygus nuliui kiekviename to intervalo taške, t. y.*

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0$$

su visais $x \in [a, b]$.

8.4 Teorema. *Jei funkcijos* y_1, y_2, ..., y_n *yra tiesiškai priklausomos intervale* $[a, b]$, *tai jų Vronskio determinantas yra tapačiai lygus nuliui:*

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = 0.$$

Aukščiau pateiktų teoremų įrodymus ir aptartus atskirus atvejus galima rasti [5], [14].

Apibrėšime (8.2) diferencialinės lygties fundamentaliosios sprendinių sistemos sąvoką.

8.6 Apibrėžimas. Bet kuris n tiesiškai nepriklausomų (8.2) diferencialinės lygties atskirųjų sprendinių rinkinys vadinamas (8.2) diferencialinės lygties fundamentaliąja sprendinių sistema.

Prisiminę aukščiau suformuluotas teoremas, galime tvirtinti, kad Vronskio determinantas, sudarytas iš n tiesiškai nepriklausomų (8.2) diferencialinės lygties atskirųjų sprendinių yra nelygus nuliui. Taigi, dabar jau turime atsakymą į klausimą, kokios turi būti funkcijos y_1, y_2, ..., y_n, kad (8.3) būtų bendrasis (8.2) diferencialinės lygties sprendinys. Tos funkcijos turi sudaryti fundamentaliąją (8.2) diferencialinės lygties sprendinių sistemą.

Iki šiol visą dėmesį skyrėme tik aukštesniųjų eilių tiesinėms homogeninėms diferencialinėms lygtims. Dabar trumpai aptarsime ir (8.1) nehomogenines lygtis bei jų sprendinių savybes [5],[14].

8.5 Teorema. *Jei žinomas atskirasis* (8.1) *nehomogeninės lygties sprendinys* Y *ir bendrasis ją atitinkančios homogeninės lygties* (8.2) *sprendinys* y_h, *tai bendrasis nehomogeninės lygties sprendinys* y *yra lygus tų sprendinių sumai, t. y.*

$$y = Y + y_h.$$

8.6 Teorema. *Jei žinoma* (8.1) *nehomogeninę lygtį atitinkančios homogeninės lygties* (8.2) *fundamentalioji sprendinių sistema, tai bendrąjį nehomogeninės lygties sprendinį galima išreikšti kvadratūromis.*

(8.1) nehomogeninės lygties bendrąjį sprendinį galima rasti vadinamuoju Lagranžo (konstantos varijavimo) metodu [14]. Trumpai apibūdinsime šį metodą.

Jei turime (8.1) nehomogeninę lygtį atitinkančios homogeninės lygties (8.2) fundamentaliąją sprendinių sistemą, tai jos bendrąjį sprendinį galime užrašyti (8.3) išraiška. Lagranžo metodo pagrindinė idėja: nehomogeninės lygties bendrąjį sprendinį reikia užrašyti analogiška išraiška, kur konstantos pakeistos laisvojo kintamojo x funkcijomis, t. y.

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n. \tag{8.6}$$

Nežinomos funkcijos $C_i(x)$ nustatomos iš tiesinių lygčių sistemos, kuri sudaroma nuosekliai diferencijuojant (8.6) pagal x ir reikalaujant, kad gautų išraiškų dalis, kurioje yra funkcijų $C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ išvestinės, būtų lygi nuliui. Diferencijuodami (8.6) pagal x turime:

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + \cdots + C_n(x)y_n' + C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n,$$

o, prilyginę nuliui išraiškos dalį su funkcijų $C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ išvestinėmis, sudarome pirmąją sistemos lygtį:

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0.$$

Tada

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + \cdots + C_n(x)y_n'.$$

Gautąją išraišką diferencijuojame pagal x ir prilyginę nuliui dalį su funkcijų $C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ išvestinėmis, turime dar vieną tiesinių lygčių sistemos lygtį:

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0.$$

Tokiu būdu $(n-1)$ kartą nuosekliai diferencijuojant (8.6) sprendinį pagal x gaunama $(n-1)$ sistemos lygtis, o dar viena lygtis gaunama (8.6) sprendinį ir visas jo išvestines y', y'', ..., $y^{(n-1)}$ įrašius į (8.1) diferencialinę lygtį. Gauname tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{n-1} + C_2'(x)y_2^{n-1} + \cdots + C_n'(x)y_n^{n-1} = f(x), \end{cases}$$

kurios nežinomieji yra $C_i'(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Šios tiesinių lygčių sistemos determinantas yra Vronskio determinantas, kuris nelygus nuliui, t. y. tokia sistema turės vienintelį sprendinį – funkcijų $C_i'(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, rinkinį. Nustatę tokį rinkinį, integruodami surasime funkcijas $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ ir (8.1) nehomogeninės diferencialinės lygties bendrąjį sprendinį.

Tolesniuose skyreliuose aptarsime atskirus (8.2) ir (8.1) diferencialinių lygčių atvejus ir jų bendruosius sprendinius.

8.2 Tiesinės homogeninės diferencialinės lygtys su pastoviais koeficientais

Šiame skyrelyje nagrinėsime (8.2) tiesines homogenines diferencialines lygtis, kuriose koeficientai p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ prie nežinomos funkcijos ir jos išvestinių yra realiosios konstantos. Lygties sprendininių ieškome tarp funkcijų, kurios nuo savo išvestinių skiriasi tik konstanta. Tokį reikalavimą tenkina funkcija

$$y = \mathrm{e}^{rx}. \tag{8.7}$$

Šią funkciją diferencijuojame n kartų ir gautas išraiškas įrašome į (8.2) diferencialinę lygtį:

$$\mathrm{e}^{rx}\left(r^n + p_1 r^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}r + p_n\right) = 0.$$

Kadangi $e^{rx} \neq 0$, tai turime, kad

$$r^n + p_1 r^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}r + p_n = 0. \tag{8.8}$$

Ši lygtis vadinama (8.2) diferencialinės lygties charakteringąja lygtimi. (8.8) lygtis visada turi n šaknų. Lygties šaknys gali būti tiek realiosios, tiek kompleksinės; gali būti kartotinių šaknų. Aptarsime kiekvieną iš šių atvejų atskirai.

Tuo atveju, kai visos (8.8) charakteringosios lygties šaknys yra realiosios ir skirtingos, turime n funkcijų:

$$y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x}, y_2 = \mathrm{e}^{r_2 x}, \ldots, y_n = \mathrm{e}^{r_n x}, \tag{8.9}$$

kurios sudaro fundamentaliąją (8.2) diferencialinės lygties su pastoviais koeficientais sprendinių sistemą (patikrinkite savarankiškai). Tada, remdamiesi ankstesniojo skyrelio medžiaga, galime parašyti bendrąjį sprendinį:

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{r_1 x} + C_2\,\mathrm{e}^{r_2 x} + \cdots + C_n\,\mathrm{e}^{r_n x},$$

čia C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ – bet kurios konstantos.

Jei charakteringoji lygtis su realiaisiais koeficientais turi kompleksinę šaknį, tai ir jai jungtinis kompleksinis skaičius yra charakteringosios lygties šaknis. Vadinasi, ir šiuo atveju bendrojo sprendinio išraiška yra tokia pati, kaip ir realiųjų šaknų atveju, bet tarp y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ yra funkcijos

$$y_k = \mathrm{e}^{(a+bi)x}, \quad y_j = \mathrm{e}^{(a-bi)x}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \quad k \neq j.$$

Kadangi nagrinėjame diferencialines lygtis,kurių koeficientai prie nežinomos funkcijos ir jos išvestinių yra realieji skaičiai, tai ir sprendinius užrašome realiosiomis funkcijomis. Prisiminkime 8.1, 8.2 teoremas, kurios leidžia šiuos du atskiruosius sprendinius, atitinkančius kompleksinių šaknų porą, pakeisti tokiais sprendiniais:

$$\bar{y_k} = \frac{1}{2}\left(y_k + y_j\right), \quad \bar{y_j} = \frac{1}{2i}\left(y_k - y_j\right). \tag{8.10}$$

Šios funkcijos yra tiesiškai nepriklausomos, todėl ir sprendiniai y_1, y_2, $\ldots$, y_n su funkcijomis $\bar{y_k}$ ir $\bar{y_j}$ įrašytomis vietoje y_k ir y_j sudaro fundamentaliąją sprendinių sistemą. Be to, remdamiesi Oilerio formulėmis

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right), \quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\right),$$

pertvarkę (8.10) sprendinių išraiškas, turime, kad

$$\bar{y_k} = \mathrm{e}^{ax}\cos bx, \quad \bar{y_j} = \mathrm{e}^{ax}\sin bx. \tag{8.11}$$

Tada tais atvejais, kai charakteringoji lygtis turi ir kompleksinių šaknų, kiekvieną jų porą atitinka (8.11) funkcijų pora, o realiąsias šaknis atitinkančios funkcijos užrašomos pagal (8.9), t. y. bendrasis (8.2) diferencialinės lygties sprendinys yra

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{r_1x} + C_2\,\mathrm{e}^{r_2x} + \cdots + C_{k-1}\,\mathrm{e}^{r_{k-1}x} + C_k\,\mathrm{e}^{ax}\cos bx + C_{k+1}\,\mathrm{e}^{r_{k+1}x} + \cdots +$$

$$C_{j-1}\,\mathrm{e}^{r_{j-1}x} + C_j\,\mathrm{e}^{ax}\sin bx + C_{j+1}\,\mathrm{e}^{r_{j+1}x} + \cdots + C_n\,\mathrm{e}^{r_nx}.$$

Dabar aptarsime tuos atvejus, kai charakteringoji lygtis turi kartotinių šaknų (realiųjų arba kompleksinių).

Jei kurios nors charakteringosios lygties realiosios šaknies r_j kartotinumas yra α, tai tuomet turime tik $n-\alpha$ skirtingų šaknų. Kaip jau žinome, norėdami užrašyti bendrąjį (8.2) diferencialinės lygties sprendinį, turime turėti jos fundamentaliąją sprendinių sistemą. Vadinasi, šiuo atveju kartotinę šaknį turėtų atitikti α tiesiškai nepriklausomų funkcijų rinkinys. Galima įsitikinti, kad α kartotinumo šaknį atitinka tokia tiesiškai nepriklausomų funkcijų sistema:

$$y_{j_0} = \mathrm{e}^{r_jx}, y_{j_1} = x\,\mathrm{e}^{r_jx}, \ldots, y_{j_{\alpha-1}} = x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{r_jx}. \tag{8.12}$$

Bendrąjį sprendinį užrašome atsižvelgdami į aukščiau aptartus šaknų atvejus ir į jo išraišką įtraukdami (8.12) pavidalo funkcijas.

Jei kartotinė (α kartotinumo) yra kompleksinė charakteringosios lygties šaknis, tai to paties kartotinumo yra ir jungtinė kompleksinė charakteringosios lygties šaknis. Kaip ir kartotinių realiųjų šaknų atveju, kiekvienai jų teks priskirti po α tiesiškai nepriklausomų funkcijų, t. y.

$$y_{j_0} = \mathrm{e}^{ax}\cos bx, y_{j_1} = x\,\mathrm{e}^{ax}\cos bx, \ldots, y_{j_{\alpha-1}} = x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{ax}\cos bx,$$

$$y_{k_0} = \mathrm{e}^{ax}\sin bx, y_{k_1} = x\,\mathrm{e}^{ax}\sin bx, \ldots, y_{k_{\alpha-1}} = x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{ax}\sin bx.$$

Bendrasis sprendinys užrašomas analogiškai, kaip ir kartotinių realiųjų šaknų atveju.