3 Trečioji paskaita. LYGTYS, SUVEDAMOS Į HOMOGENINES DL. PILNŲJŲ DIFERENCIALŲ LYGTYS

Šioje paskaitoje nagrinėjami klausimai:

1. Bendresnis homogeninės DL pavidalas.
2. Tiesinės trupmeninės lygtys ir jų sprendimas.
3. Kitos lygtys, kurios gali būti pertvarkytos į homogenines DL.
4. Pilnojo diferencialo sąvoka ir savybės.
5. Pilnųjų diferencialų lygtys ir jų sprendimas.

3.1 Bendresnis homogeninės DL pavidalas.Tiesinės trupmeninės lygtys ir jų sprendimas

Į (2.5) pavidalą pertvarkomos (skaitytojui siūlome įsitikinti savarankiškai) ir bendresnės išraiškos diferencialinės lygtys

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0,$$

kurių funkcijos $f(x,y)$ ir $g(x,y)$ yra to paties laipsnio homogeninės funkcijos. Tokios lygtys taip pat vadinamos pirmosios eilės homogeninėmis diferencialinėmis lygtimis, o joms spręsti gali būti taikomas (2.6) keitinys.

Naudodami tą patį keitinį galime spręsti ir dar vieną diferencialinių lygčių grupę – vadinamasias tiesines trupmenines diferencialines lygtis:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}, \tag{3.1}$$

čia a, b, c, a_1, b_1, c_1 – žinomos konstantos.

(3.1) diferencialines lygtis aptarkime plačiau.

Tuo atveju, kai konstantos $c = c_1 = 0$, turime jau nagrinėtą homogeninę lygtį. Kai $c \neq 0$ arba $c_1 \neq 0$, (3.1) diferencialinė lygtis gali būti pertvarkyta į homogeninę diferencialinę lygtį keitiniu:

$$\begin{cases} x = \xi + k, \\ y = \eta + l, \end{cases} \tag{3.2}$$

čia k ir l – konstantos, kurios nustatomos sprendimo eigoje. Diferencijuojame keitinį ir gautus diferencialus $dx = d\xi$, $dy = d\eta$ bei (3.2) išraiškas įrašome į (3.1) diferencialinę lygtį:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a\xi + b\eta + ak + bl + c}{a_1\xi + b_1\eta + a_1k + b_1l + c_1}.$$

Pastaroji lygtis bus homogeninė, jei konstantas k ir l parinksime taip, kad būtų teisingos lygybės:

$$\begin{cases} ak + bl + c = 0, \\ a_1k + b_1l + c_1 = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Taigi nežinomas keitinio konstantas k ir l nustatome iš (3.3) tiesinių lygčių sistemos. Iš tiesinės algebros kurso žinome, kad tiesinių lygčių sistemos sprendinių aibė priklauso nuo koeficientų matricos determinanto.

- Tegu
$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$
Tada nagrinėjama tiesinių lygčių sistema turi vienintelį sprendinį – konstantos k ir l nustatomos vienareikšmiškai, o (3.1) diferencialinė lygtis keičiama jai ekvivalenčia homogenine diferencialine lygtimi:
$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta},$$
kuri sprendžiama naudojant (2.6) keitinį (šiuo atveju $z = \dfrac{\eta}{\xi}$), o į gautą η ir ξ priklausomybę įrašomos jų išraiškos, gautos iš (3.2) ir (3.3):
$$\begin{cases} \xi = x - k, \\ \eta = y - l. \end{cases}$$

- Tegu
$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0.$$
Tada šio determinanto eilutės yra proporcingos, t. y.
$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{1}{\lambda},$$
o iš čia
$$\begin{cases} a_1 = a\lambda, \\ b_1 = b\lambda. \end{cases}$$
Gautas išraiškas įrašę į (3.1) diferencialinę lygtį, turime:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1}. \tag{3.4}$$
Pažymėkime $v = ax + by$. Iš šio keitinio išspręskime y ir raskime jo išvestinę pagal x:
$$y = \frac{1}{b}\left(v - ax\right),$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dv}{dx} - a\right).$$
Gautąsias išraiškas įrašę į (3.4) diferencialinę lygtį, turime lygtį
$$\frac{1}{b}\frac{dv}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{v + c}{\lambda v + c_1},$$
kurios kintamuosius galime atskirti.

Ką tik aptarti tiesinių trupmeninių diferencialinių lygčių sprendimo metodai pritaikomi ir tais atvejais, kai dešinėje lygybės pusėje yra kuri nors tiesinio trupmeninio reiškinio funkcija, t. y. visa medžiaga tinka ir lygtims, turinčioms tokį pavidalą:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right).$$

3.1 Apibrėžimas. Diferencialinė lygtis

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{3.5}$$

vadinama pilnųjų diferencialų lygtimi, jei reiškinys

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

yra kurios nors funkcijos pilnasis diferencialas, t. y., jeigu

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dF(x,y).$$

Turint pilnųjų diferencialų lygties apibrėžimą, nesunku pastebėti, kad, jeigu mums pavyksta nustatyti funkciją $F(x,y)$, tai mes turime lygtį

$$dF(x,y) = 0,$$

kurios bendrasis integralas nustatomas lygybe

$$F(x,y) = C.$$

Kaip nustatoma funkcija $F(x,y)$? Priminkime iš matematinės analizės kurso žinomą tvirtinimą apie pilnuosius diferencialus [3].

3.1 Teorema. *Reiškinys*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

yra funkcijos $F(x,y)$ pilnasis diferencialas, jei:

1) funkcijos $P(x,y)$ ir $Q(x,y)$ kartu su savo dalinėmis išvestinėmis $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ yra apibrėžtos ir tolydžios kurioje nors vienajungėje plokštumos xOy srityje (tai sritis, kuriai priklausančios uždaros kreivės vidus taip pat priklauso sričiai),

2) visuose tos srities taškuose teisinga lygybė

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Remiantis šia teorema nesunku sudaryti pilnųjų diferencialų lygties sprendimo planą:

1. Patikriname, ar funkcijos $P(x,y)$ ir $Q(x,y)$ kartu su savo dalinėmis išvestinėmis $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ yra apibrėžtos ir tolydžios kurioje nors vienajungėje plokštumos xOy srityje.

2. Išsiaiškiname, ar visuose tos srities taškuose galioja lygybė:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

3. Jei tenkinami pirmieji du reikalavimai, tai pagal 3.1 teoremą egzistuoja tokia funkcija $F(x, y)$, kuriai teisinga lygybė:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y).$$

4. Kadangi

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy,$$

tai turi būti

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y).$$

Toliau nagrinėjame vieną iš šių lygybių pasirinktinai. Iš lygybės

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)\right)$$

turime, kad

$$F(x, y) = \int P(x, y)dx + \phi(y) \quad \left(F(x, y) = \int Q(x, y)dy + \psi(x)\right), \tag{3.6}$$

čia $\phi(y)$ – bet kuri kintamojo y funkcija ($\psi(x)$ – bet kuri kintamojo x funkcija).

5. Gautąją $F(x, y)$ išraišką diferencijuojame pagal y (diferencijuojame pagal x)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x, y)dx + \phi(y)\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int Q(x, y)dy + \psi(x)\right)\right).$$

Funkcijos $\frac{\partial P}{\partial y}$ $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ yra tolydžios, tai

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}dx + \phi'(y)\left(\frac{\partial F}{\partial x} = \int \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}dy + \psi'(x)\right).$$

Gautąsias išraiškas prilyginame funkcijai $Q(x, y)\,(P(x, y))$, t. y. gauname lygtį nežinomai funkcijai $\phi(y)\,(\psi(x))$ nustatyti:

$$Q(x, y) + \phi_1(y) + \phi'(y) = Q(x, y)\left(P(x, y) + psi_1(x) + \psi'(x)\right)).$$

6. Gautą funkcijos $\phi(y)\,(\psi(x))$ išraišką įrašome į (3.6) lygybę.

7. Gavome funkciją $F(x, y)$. Tada (3.5) diferencialinės lygties bendrasis integralas yra

$$F(x, y) = C.$$