2 Antroji paskaita. PAPRASČIAUSIOS DIFERENCIALINĖS LYGTYS IR JŲ SPRENDIMO METODAI

Šioje paskaitoje nagrinėjami klausimai:

1. Lygtys, kuriose kintamieji atskirti.
2. Lygtys, suvedamos į lygtis su atskiriamaisiais kintamaisiais.
3. Homogeninės funkcijos sąvoka.
4. Homogeninės diferencialinės lygtys ir jų sprendimas.

2.1 Lygtys, kuriose kintamuosius galima atskirti

2.1 Apibrėžimas. Normalioji diferencialinė lygtis, turinti pavidalą

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \tag{2.1}$$

vadinama diferencialine lygtimi su atsiskiriančiais kintamaisiais.

Kintamųjų atskyrimą galima apibūdinti dvejopai, bet rezultatai bus tie patys.

- (2.1) lygtį dalijame iš funkcijos $g(y)$ (tariame, kad $g(y) \not\equiv 0$):

  $$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x)$$

  ir abi gautosios lygybės puses integruojame pagal x:

  $$\int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx.$$

  Prisiminkime, kad $y = y(x)$, o $\dfrac{dy}{dx}dx = dy$. Tuomet gauname integralinę lygybę:

  $$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx, \tag{2.2}$$

  kurios kairėje ir dešinėje pusėse yra atskirti kintamieji y ir x. Integruodami gauname

  $$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

  Tai yra sąryšis, siejantis funkciją, laisvąjį kintamąjį ir bet kurią konstantą, t. y. (2.1) diferencialinės lygties bendrasis integralas.

- laikydami, kad $g(y) \not\equiv 0$, o į funkcijos išvestinę žvelgdami kaip į santykį $\dfrac{dy}{dx}$, pagal proporcijos taisyklę pertvarkome (2.1) lygtį taip, kad vienoje lygybės pusėje būtų tik dy ir funkcija $g(y)$, kitoje – dx ir funkcija $f(x)$:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

  Ši lygtis yra su atskirtaisiais kintamaisiais. Integruodami pastarąją lygybę, gauname (2.2) integralinę lygybę ir bendrąjį sprendinį.

Vieną iš atskirų tokio tipo lygties atvejų (kai $g(y) \equiv 1$) jau esame aptarę ankstesniame skyriuje. Analogiškai nagrinėjamas ir atvejis, kai funkcija $f(x) \equiv 1$. Šiuo atveju, diferencialinė lygtis pertvarkoma į tokią integralinę lygtį:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int dx.$$

Galima paminėti ir tokį atvejį, kai $f(x)g(y) = k$, čia k – konstanta. Tokiu atveju, diferencialinė lygtis pakeičiama jai ekvivalenčia integraline lygtimi:

$$\int dy = k \int dx.$$

Apibendrindami aukščiau išdėstytą medžiagą, galime pastebėti, kad kintamųjų atskyrimas sėkmingai taikomas ir diferencialinėms lygtims, turinčioms tokią išraišką (skaitytojui siūlome tuo įsitikinti savarankiškai):

$$f_1(x)g_2(y)dx + f_2(x)g_1(y)dy = 0.$$

arba

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Pastaroji lygtis vadinama pirmosios eilės diferencialinės lygties simetriniu pavidalu. Lygties simetrinis pavidalas nesunkiai gali būti pakeistas normaliuoju pavidalu. Tarę, kad $N(x,y) \not\equiv 0$, lygtį perrašome taip:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}.$$

Pažymėję $f(x,y) = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$, gauname jau aptartą normaliąją diferencialinę lygtį

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y).$$

2.2 Homogeninės diferencialinės lygtys

Prieš susipažindami su homogeninėmis diferencialinėmis lygtimis, prisiminsime homogeninės funkcijos sąvoką.

2.2 Apibrėžimas. Funkcija $f(x,y)$ vadinama homogenine n-tojo laipsnio funkcija, jei su visais x ir y galioja lygybė

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y), \tag{2.3}$$

čia t – parametras.

Tada akivaizdu, jei funkcija $f(x,y)$ – homogeninė, tai, fiksuodami $t = \dfrac{1}{x}$, gauname, kad

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^n} f(x,y),$$

o iš pastarosios lygybės:

$$f(x,y) = x^n f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Vadinasi, n-tojo laipsnio homogeninę funkciją galime pertvarkyti taip:

$$f(x,y) = x^n F\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2.4}$$

čia $F\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

2.3 Apibrėžimas. (1.3) diferencianė lygtis vadinama homogenine, jei jos dešinės pusės funkcija yra nulinio laipsnio homogeninė funkcija.

Remiantis (2.4) paprasčiausią homogeninę diferencialinę lygtį galima užrašyti taip:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.5}$$

(2.5) homogeninė lygtis gali būti sprendžiama naudojant keitinį

$$z = \frac{y}{x}, \tag{2.6}$$

čia $z = z(x)$.

Įsitikinsime šio keitinio tinkamumu.

Iš (2.6) lygybės turime, kad

$$y = zx, \quad \text{o} \quad y' = z'x + z.$$

Gautas išraiškas įrašę į (2.5) diferencialinę lygtį, gauname:

$$z'x + z = F(z).$$

Šios lygties kintamuosius galima atskirti. Atskirdami kintamuosius gauname:

$$\int \frac{dz}{F(z) - z} = \int \frac{dx}{x},$$

Iš čia turime

$$\Phi(z) = \ln |\, x \,| + C,$$

čia $\Phi(z)$ yra funkcijos $\dfrac{1}{F(z) - z}$ pirmykštė funkcija, o C – bet kuri konstanta. Laisvąją konstantą C pakeiskime $\ln |\, C \,|$. Tokį pakeitimą naudojame tais atvejais, kai bendrajam integralui, kurio išraiškoje yra logaritmai, norime suteikti paprastesnį pavidalą. Kadangi $\ln |\, C \,|$, kai $C \neq 0$, gali įgyti bet kurią realiąją reikšmę, tai toks pakeitimas leistinas.

Tuomet pakeitę konstantą ir vietoj z įrašę $\dfrac{y}{x}$ gausime bendrąjį (2.5) diferencialinės lygties integralą

$$\Phi\left(\frac{y}{x}\right) = \ln |\, Cx \,|.$$