Nagrinėkime aukos - plėšrūno modelį:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0.2x - 0.005xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = -0.5y + 0.01xy. \end{cases}$$

Tarkime, kad pradiniu laiko momentu populiacijose atitinkamai buvo $x(0) = 70,\ y(0) = 40$ individų.

```
> restart;with(plots):
```

Randame sistemos ramybės taškus:

```
> f1:=0.2*x-0.005*x*y:f2:=-
0.5*y+0.01*x*y:ramybe:=solve({f1=0,f2=0},{x,y});
```

$$ramybe := \{x = 0.,\ y = 0.\},\ \{x = 50.,\ y = 40.\}$$

Sudarome linearizacijos matricą:

```
>
l[1,1]:=diff(f1,x):l[1,2]:=diff(f1,y):l[2,1]:=diff(f2,x):l[2,2]:=diff
(f2,y):
> L:=Matrix(2,2,l);
```

$$L := \begin{bmatrix} 0.2 - 0.005\,y & -0.005\,x \\ 0.01\,y & -0.5 + 0.01\,x \end{bmatrix}$$

Tiriame ramybės tašką (50,40):
sudarome linearizacijos matricą šiame taške

```
> g1:=subs(ramybe[2],L);
```

$$g1 := \begin{bmatrix} 0. & -0.250 \\ 0.40 & 0. \end{bmatrix}$$

Sudarome tiesinę lygčių sistemą:

```
> lygtis_1:=diff(x(t),t)=g1[1,1]*x(t)+g1[1,2]*y(t);
```

$$lygtis\_1 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = -0.250\,\mathrm{y}(t)$$

```
> lygtis_2:=diff(y(t),t)=g1[2,1]*x(t)+g1[2,2]*y(t);
```

$$lygtis\_2 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) = 0.40\,\mathrm{x}(t)$$

Išsprendžiame sudarytąją DL sistemą: surandame aukų ir plėšrūnų skaičiaus kitimo bėgant laikui funkcijas:

```
> spr:=dsolve({lygtis_1,lygtis_2});
```

$$spr := \left\{ \mathrm{x}(t) = \_C1\,\sin\left(\frac{\sqrt{10}\,t}{10}\right) + \_C2\,\cos\left(\frac{\sqrt{10}\,t}{10}\right),\ \mathrm{y}(t) = \frac{2}{5}\sqrt{10}\left(-\_C1\,\cos\left(\frac{\sqrt{10}\,t}{10}\right) + \_C2\,\sin\left(\frac{\sqrt{10}\,t}{10}\right)\right) \right\}$$

Atliekame koordinačių pakeitimą (kad fazinį portretą matytume ramybės taške) ir surandame sprendinį, atitinkantį pradinę sąlygą:

```
> l1:=subs(x(t)=u-50,spr[1]);
```
$$l1 := u - 50 = \_C1 \sin\left(\frac{\sqrt{10}\, t}{10}\right) + \_C2 \cos\left(\frac{\sqrt{10}\, t}{10}\right)$$

```
> l2:=subs(y(t)=v-40,spr[2]);
```
$$l2 := v - 40 = \frac{2}{5}\sqrt{10}\left(-\_C1 \cos\left(\frac{\sqrt{10}\, t}{10}\right) + \_C2 \sin\left(\frac{\sqrt{10}\, t}{10}\right)\right)$$

```
> sys:={l1,l2};
```
$$sys := \left\{ u - 50 = \_C1 \sin\left(\frac{\sqrt{10}\, t}{10}\right) + \_C2 \cos\left(\frac{\sqrt{10}\, t}{10}\right), \right.$$
$$\left. v - 40 = \frac{2}{5}\sqrt{10}\left(-\_C1 \cos\left(\frac{\sqrt{10}\, t}{10}\right) + \_C2 \sin\left(\frac{\sqrt{10}\, t}{10}\right)\right) \right\}$$

```
> sistema:=subs({t=0,u=70,v=40},sys);
```
$$sistema := \left\{ 0 = \frac{2}{5}\sqrt{10}\,(-\_C1 \cos(0) + \_C2 \sin(0)),\ 20 = \_C1 \sin(0) + \_C2 \cos(0) \right\}$$

```
> spr1:=solve(sistema,{_C1,_C2});
```
$$spr1 := \{ \_C1 = 0,\ \_C2 = 20 \}$$

```
> sp_uv:=subs({_C1 = rhs(spr1[1]), _C2 =
rhs(spr1[2])},sys);sp_u:=solve(sp_uv[1],u);sp_v:=solve(sp_uv[2],v);
```
$$\left\{ u - 50.00000000 = 20.\cos\left(\frac{\sqrt{10}\, t}{10}\right),\ v - 40.00000000 = 8.000000000 \sin\left(\frac{\sqrt{10}\, t}{10}\right)\sqrt{10} \right\}$$

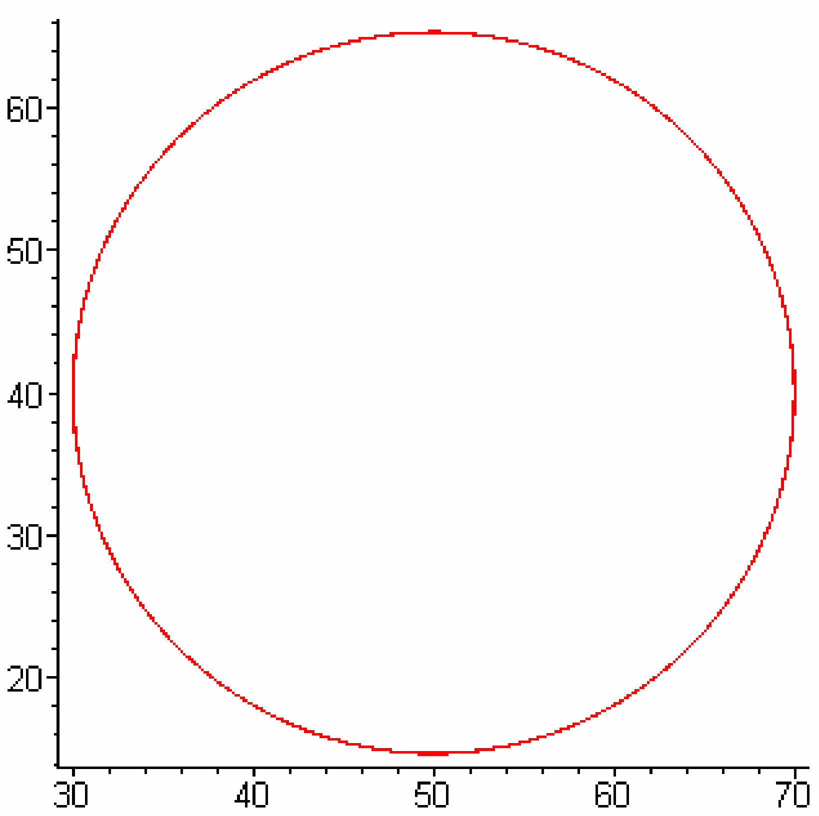
$$sp\_uv := \left\{ u - 50 = 20 \cos\left(\frac{\sqrt{10}\, t}{10}\right),\ v - 40 = 8 \sin\left(\frac{\sqrt{10}\, t}{10}\right)\sqrt{10} \right\}$$

$$sp\_u := 20 \cos\left(\frac{\sqrt{10}\, t}{10}\right) + 50$$

$$sp\_v := 8 \sin\left(\frac{\sqrt{10}\, t}{10}\right)\sqrt{10} + 40$$

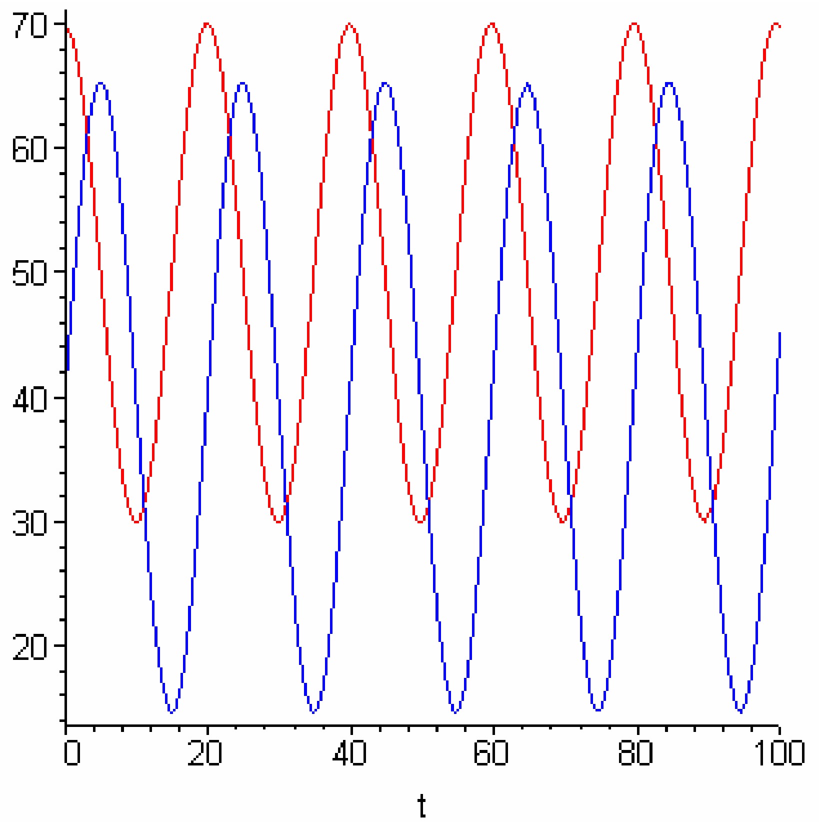
Nubrėžiame sprendinio grafiką, kuriame eliminuota priklausomybė nuo laiko. Matome kaip kinta aukų ir plėšrūnų populiacijos viena kitos atžvilgiu:

```
> plot([sp_u, sp_v, t=0..540]);
```



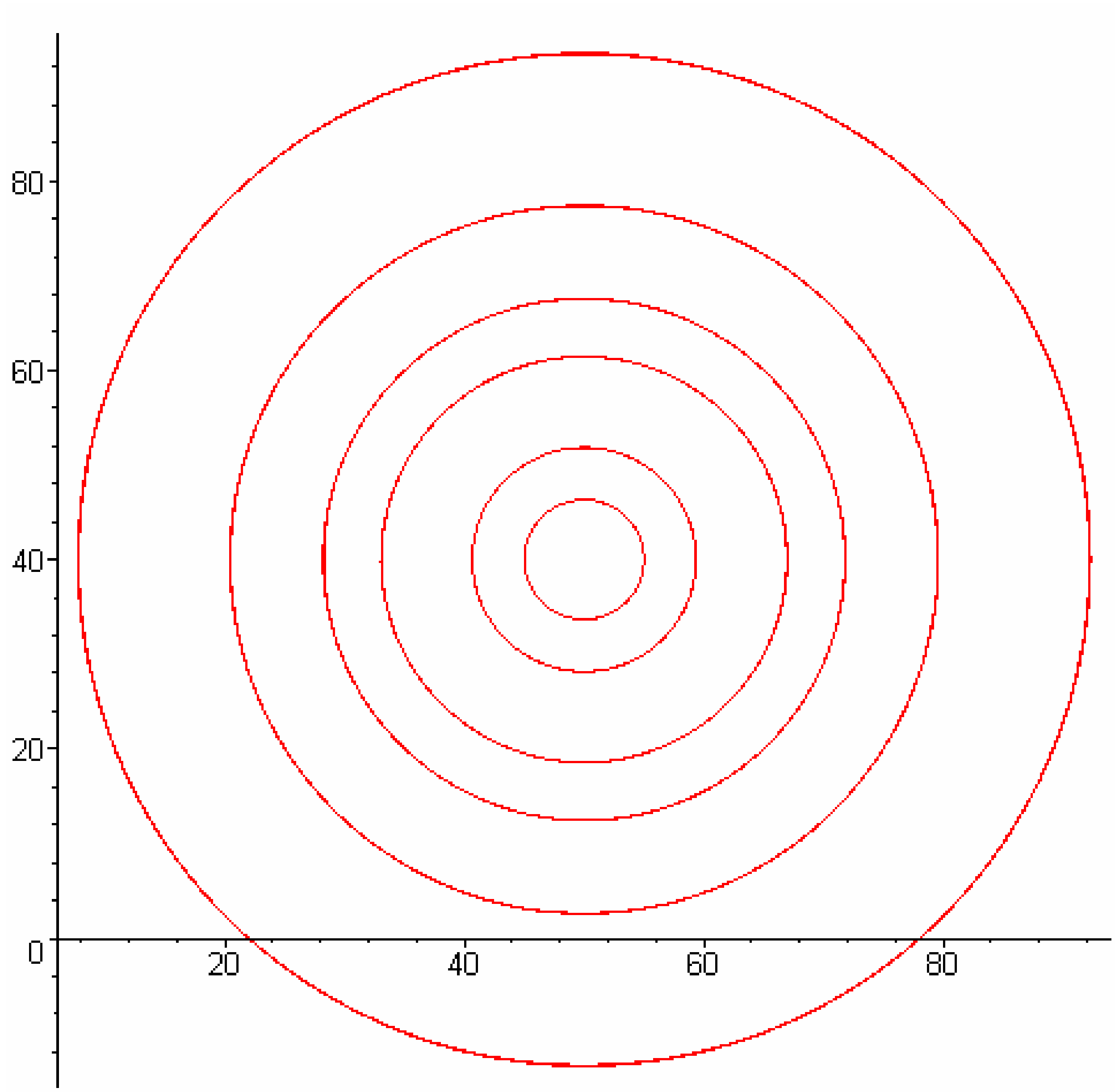
Dabar pavaizduosime sistemos sprendinius, atitinkančius pradinę sąlygą - aukų ir plėšrūnų skaičiaus kitimą bėgant laikui:

```
>
auka:=plot(sp_u,t=0..100,color=red):plesrunas:=plot(sp_v,t=0..100,col
or=blue):
> display({auka,plesrunas});
```



Norėdami nubrėžti fazinį portretą šiame ramybės taške, parenkame daugiau pradinių sąlygų:

```
> for i from 1 by 1 to 10 do
sistema1:=subs({t=0,u=5+10*i,v=10*i},sys):spr1:=solve(sistema1,{_C1,_
C2}):sp1_uv:=subs({_C1 = rhs(spr1[1]), _C2 =
rhs(spr1[2])},sys):sp1_u:=solve(sp1_uv[1],u):sp1_v:=solve(sp1_uv[2],v
):pav[i]:=plot([sp1_u, sp1_v, t=0..540]):end
do:display({pav[1],pav[2],pav[3],pav[4],pav[5],pav[6]});
>
```



Tiriame ramybės tašką (0,0):
sudarome linearizacijos matricą šiame taške

```
> g2:=subs(ramybe[1],L);
```

$$g2 := \begin{bmatrix} 0.2 & -0. \\ 0. & -0.5 \end{bmatrix}$$

Sudarome tiesinę lygčių sistemą:

```
> lygtis_11:=diff(x(t),t)=g2[1,1]*x(t)+g2[1,2]*y(t);
```

$$lygtis\_11 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = 0.2\,\mathrm{x}(t)$$

```
> lygtis_21:=diff(y(t),t)=g2[2,1]*x(t)+g2[2,2]*y(t);
```

$$lygtis\_21 := \frac{d}{dt}\,y(t) = -0.5\,y(t)$$

Išsprendžiame sudarytąją DL sistemą: surandame aukų ir plėšrūnų skaičiaus kitimo bėgant laikui funkcijas:

```
> spr2:=dsolve({lygtis_11,lygtis_21});
```

$$spr2 := \{\, x(t) = \_C1\, e^{\left(\frac{t}{5}\right)},\ y(t) = \_C2\, e^{\left(-\frac{t}{2}\right)} \}$$

Atliekame koordinačių pakeitimą (kad fazinį portretą matytume ramybės taške) ir surandame sprendinį, atitinkantį pradinę sąlygą:

```
> l11:=subs(x(t)=u-0,spr2[1]);
```

$$l11 := u = \_C1\, e^{\left(\frac{t}{5}\right)}$$

```
> l21:=subs(y(t)=v-0,spr2[2]);
```

$$l21 := v = \_C2\, e^{\left(-\frac{t}{2}\right)}$$

```
> sys1:={l11,l21};
```

$$sys1 := \{\, u = \_C1\, e^{\left(\frac{t}{5}\right)},\ v = \_C2\, e^{\left(-\frac{t}{2}\right)} \}$$

```
> sistema1:=subs({t=0,u=70,v=40},sys1);
```

$$sistema1 := \{\, 40 = \_C2\, e^{0},\ 70 = \_C1\, e^{0} \}$$

```
> spr21:=solve(sistema1,{_C1,_C2});
```

$$spr21 := \{\, \_C1 = 70,\ \_C2 = 40 \}$$

```
> sp1_uv:=subs({_C1 = rhs(spr21[1]), _C2 =
rhs(spr21[2])},sys1);sp1_u:=solve(sp1_uv[1],u);sp1_v:=solve(sp1_uv[2]
,v);
```

$$\{\, u - 50.00000000 = 20.\cos\left(\frac{\sqrt{10}\,t}{10}\right),\ v - 40.00000000 = 8.000000000 \sin\left(\frac{\sqrt{10}\,t}{10}\right)\sqrt{10} \}$$

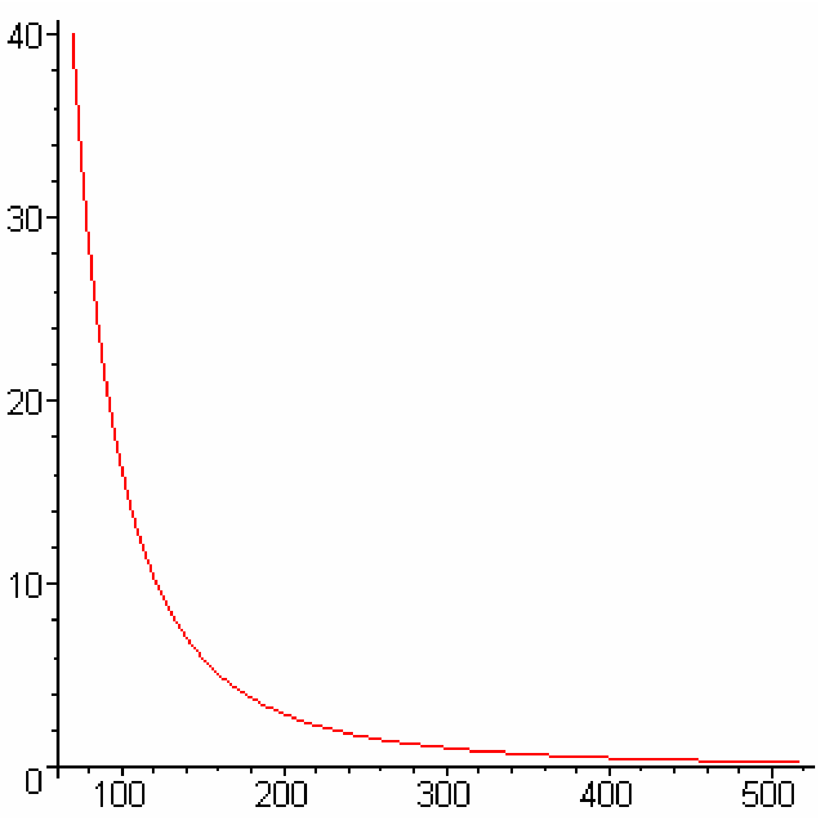
$$sp1\_uv := \{\, u = 70\, e^{\left(\frac{t}{5}\right)},\ v = 40\, e^{\left(-\frac{t}{2}\right)} \}$$

$$sp1\_u := 70\, e^{\left(\frac{t}{5}\right)}$$

$$sp1\_v := 40\, e^{\left(-\frac{t}{2}\right)}$$

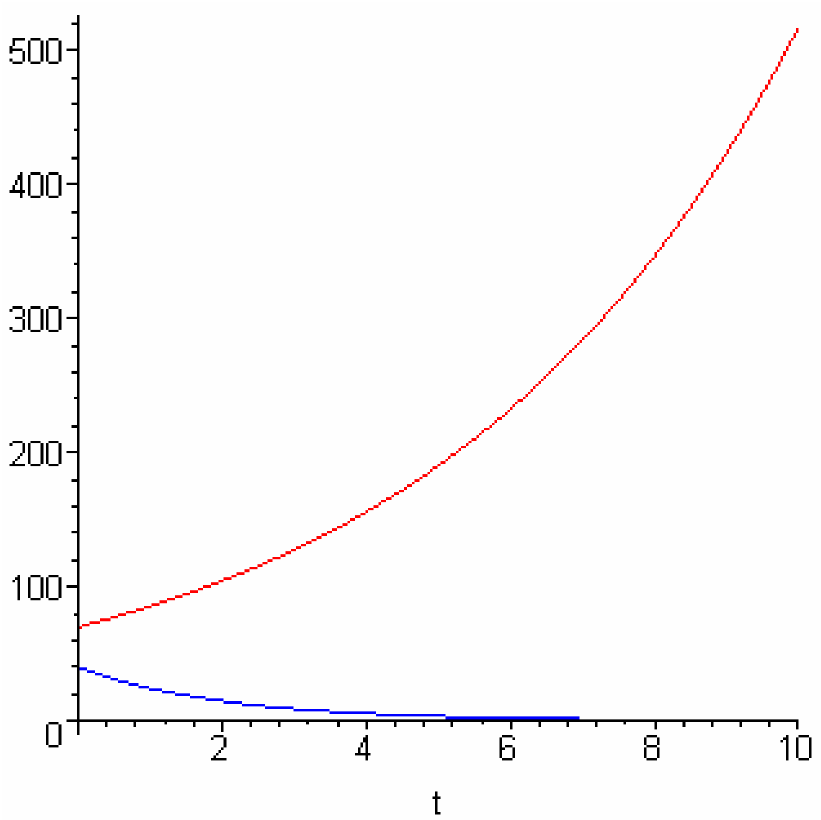
Nubrėžiame sprendinio grafiką, kuriame eliminuota priklausomybė nuo laiko. Matome kaip kinta aukų ir plėšrūnų populiacijos viena kitos atžvilgiu:

```
> plot([sp1_u, sp1_v, t=0..10]);
```



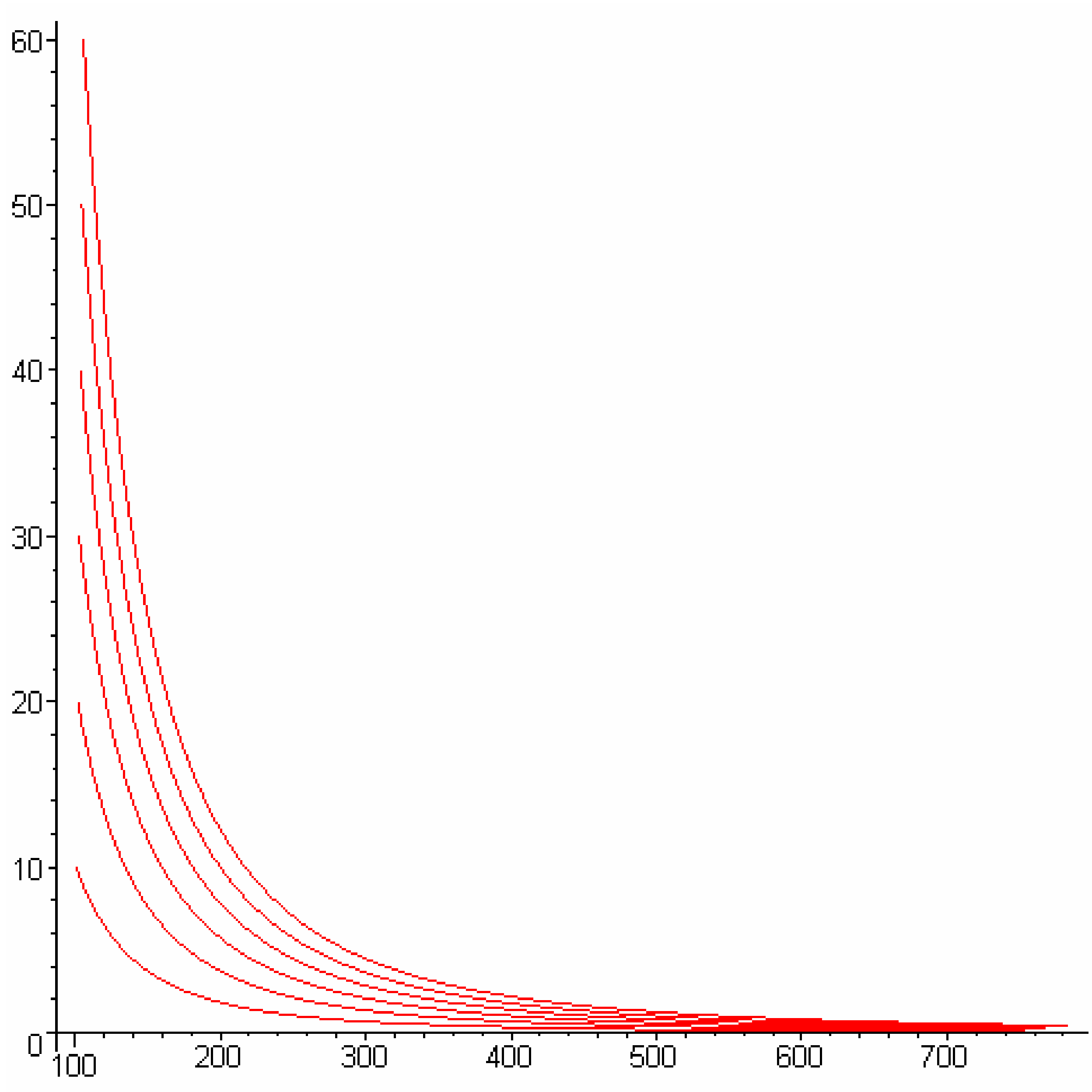
Dabar pavaizduosime sistemos sprendinius, atitinkančius pradinę sąlygą - aukų ir plėšrūnų skaičiaus kitimą bėgant laikui:

```
>
auka:=plot(sp1_u,t=0..10,color=red):plesrunas:=plot(sp1_v,t=0..10,col
or=blue):
> display({auka,plesrunas});
```



Norėdami nubrėžti fazinį portretą šiame ramybės taške, parenkame daugiau pradinių sąlygų:

```
> for i from 1 by 1 to 10 do
sistema2:=subs({t=0,u=100+i,v=10*i},sys1):spr3:=solve(sistema2,{_C1,_C2}):sp2_uv:=subs({_C1 = rhs(spr3[1]), _C2 =
rhs(spr3[2])},sys1):sp2_u:=solve(sp2_uv[1],u):sp2_v:=solve(sp2_uv[2],
v):pav[i]:=plot([sp2_u, sp2_v, t=0..10]):end
do:display({pav[1],pav[2],pav[3],pav[4],pav[5],pav[6]});
>
```



60
50
40
30
20
10
0
100
200
300
400
500
600
700